

Holger Götz

Jamming und Konvektion in Granulaten

Holger Götz

Jamming und Konvektion in Granulaten

FAU Forschungen, Reihe B
Medizin, Naturwissenschaft, Technik
Band 45


Herausgeber der Reihe:
Wissenschaftlicher Beirat der FAU University Press

Holger Götz

Jamming und Konvektion in Granulaten

Erlangen
FAU University Press
2024

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im
Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Kontakt: Holger Götz, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-
Nürnberg, ( <https://ror.org/oof7hpc57>)
holger.goetz@fau.de; <https://orcid.org/0000-0003-0944-2449>

Bitte zitieren als

Götz, Holger. 2024. *Jamming und Konvektion in Granulaten*. FAU
Forschungen, Reihe B, Medizin, Naturwissenschaft, Technik Band 45.
Erlangen: FAU University Press. DOI: 10.25593/978-3-96147-769-2.

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt.
Die Rechte an allen Inhalten liegen bei ihren jeweiligen Autoren.
Sie sind nutzbar unter der Creative-Commons-Lizenz BY.

Der vollständige Inhalt des Buchs ist als PDF über OPEN FAU
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg abrufbar:
<https://open.fau.de/home>

Verlag und Auslieferung:
FAU University Press, Universitätsstraße 4, 91054 Erlangen

Druck: docupoint GmbH

ISBN: 978-3-96147-768-5 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-96147-769-2 (Online-Ausgabe)
ISSN: 2198-8102
DOI: 10.25593/978-3-96147-769-2

Jamming und Konvektion in Granulaten

Der Technischen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades Dr.-Ing.

vorgelegt von

Holger Götz

Als Dissertation genehmigt
von der Technischen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen

Prüfung: 22.05.2024

Gutachter: Prof. Dr. Thorsten Pöschel
Prof. Dr. Stefan Heinrich

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Formelzeichenverzeichnis | v |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Granulare Stoffe | 1 |
| 1.2 Der Jamming-Übergang | 2 |
| 1.3 Struktur der Arbeit | 3 |
| 2 Diskrete-Element-Simulationen granularer Stoffe | 5 |
| 3 Membranen in DEM Simulationen | 9 |
| 3.1 Einleitung | 9 |
| 3.2 Modellbeschreibung | 10 |
| 3.2.1 Dehnung | 11 |
| 3.2.2 Biegeeigenschaften | 12 |
| 3.2.3 Granulat-Membran-Interaktion | 14 |
| 3.2.4 Externe Kräfte | 16 |
| 3.3 Anwendungen | 16 |
| 3.3.1 Triaxialversuch | 17 |
| 3.3.2 Reibungstest | 20 |
| 3.4 Zusammenfassung | 21 |
| 4 Granulare Greifer für Soft Robotics | 23 |
| 4.1 Einleitung | 23 |
| 4.2 Granulare Greifer mit weichen Partikeln | 24 |
| 4.3 Hohlkugelsimulation | 27 |
| 4.4 Vergleich zur Kontinuumstheorie | 30 |
| 4.5 Zusammenfassung | 30 |
| 5 Granulares Metamaterial: Ein granularer Balken | 31 |
| 5.1 Einleitung | 31 |
| 5.2 Elastischer Biegeversuch | 32 |
| 5.2.1 Timoshenko-Balkentheorie | 35 |
| 5.2.2 Ergebnis des Biegeversuchs | 35 |
| 5.3 Strukturelle Eigenschaften | 39 |
| 5.3.1 Packungseigenschaften | 41 |
| 5.3.2 Elastizitätsmodul und Bruchfestigkeit | 43 |
| 5.3.3 Einfluss von Partikelreibung und Packungseigenschaften | 45 |
| 5.3.4 Analyse des Kraftnetzwerks | 49 |

| | | |
|-----------------------------|--|-----------|
| 5.3.5 | Position der neutralen Achse | 51 |
| 5.3.6 | Deformationsmechanismen | 52 |
| 5.3.7 | Lokale Dichteveränderungen | 54 |
| 5.3.8 | Räumliche und zeitliche Verteilung der lokalen Verformung | 56 |
| 5.4 | Zusammenfassung | 59 |
| 6 | Vibrationsinduzierte Konvektion in Schwerelosigkeit | 61 |
| 6.1 | Einleitung | 61 |
| 6.2 | Konvektionsmechanismus in der Schwerelosigkeit | 63 |
| 6.3 | Konvektion ohne oben-unten-Symmetrie | 68 |
| 6.3.1 | Ursache der Symmetriebrechung | 69 |
| 6.3.2 | Wann wird die Konvektion symmetrisch? | 71 |
| 6.4 | Konvektion in geneigten Behältern | 73 |
| 6.5 | Zusammenfassung | 80 |
| 7 | Zusammenfassung und Ausblick | 81 |
| 7.1 | Zusammenfassung | 81 |
| 7.2 | Ausblick | 82 |
| 8 | Summary | 85 |
| Anhang | | 87 |
| A | Kraft-Deformations-Verhältnis im 3-Punkt-Timoshenko-Balken | 87 |
| B | Spannung und Dehnung im 4-Punkt-Euler-Bernoulli-Balken | 88 |
| C | Lokale Mittelwerte in Granulatsystemen | 90 |
| Literaturverzeichnis | | 91 |

Formelzeichenverzeichnis

| Symbol | Einheit | Beschreibung |
|------------------------------------|-----------------------------|--|
| A | s | Dissipationskonstante |
| E | Pa | Elastizitätsmodul |
| F | N | Kraft |
| $k_{\text{Biegung}}^{\text{el}}$ | N m^{-1} | elastische Biegekonstante der Membran |
| $k_{\text{Biegung}}^{\text{diss}}$ | $\text{N m}^{-1} \text{ s}$ | dissipative Biegekonstante der Membran |
| k_{sp} | N m^{-1} | Membranfederkonstante |
| m | kg | Masse |
| p | Pa | Druck |
| R | m | Partikelradius |
| r | m | Partikelposition |
| \dot{r} | m s^{-1} | Partikelgeschwindigkeit |
| Y | Pa | Bruchfestigkeit |
| Δz | m | Verformung des Balkens |
| z | | Kontaktzahl |
| γ_{sp} | | Dissipationskonstante der Membranfeder |
| γ_{t} | | tangentiale Dissipationskonstante |
| μ | | Coulombscher Reibungskoeffizient |
| ν | | Poissonzahl |
| ϕ | | Feststoffanteil |
| ρ | kg m^{-3} | Dichte |
| σ | Pa | mechanische Spannung |

1 Einleitung

1.1 Granulare Stoffe

Granulare Stoffe bestehen aus makroskopischen Partikeln, die durch Stöße miteinander interagieren [1]. Im täglichen Leben sind sie allgegenwärtig, und zahlreiche Industriezweige sind auf den Umgang mit Granulaten angewiesen. Ihre Anwendung erstreckt sich vom Lebensmittelsektor (z. B. Getreide, Kaffee) bis hin zum Baugewerbe (z. B. Sand, Kies). Gemessen an ihrer Masse ist ein Großteil der durch Menschen gemachten Objekte granularer Natur oder aus Granulaten gefertigt [2].

In Granulaten ist die Temperatur für die Bewegung einzelner Partikel unbedeutend, solange das Material der Partikel dadurch nicht verändert wird. Die Partikelbewegungen werden stattdessen durch externe Kräfte wie Gravitationskräfte und dissipative, nichtlineare Interaktionen zwischen den Partikeln bestimmt [3]. Dennoch treten Effekte auf, bei denen in vielen anderen Materialien die Temperatur eine entscheidende Rolle hat. Zwei Beispiele sind hier der Jamming-Übergang, ein Übergang zwischen einem flüssigkeits- und feststoffartigen Zustand, sowie Konvektion.

Beim Jamming-Übergang verändern sich die mechanischen Eigenschaften eines Granulats drastisch, wenn die Partikeldichte des Systems zunimmt [4, 5]: Loses Granulat verhält sich wie eine Flüssigkeit oder ein Gas und leistet nur geringen Widerstand unter externer Belastung. Wird es jedoch komprimiert, bleiben die relativen Partikelpositionen im Wesentlichen unverändert, und das Granulat ist stabil gegenüber weiterer äußerer Einwirkung. Technische Anwendungen des Jamming-Übergangs sind insbesondere im Bereich Soft-Robotics zu finden [6]. Meist bestehen sie aus einem Granulat, das von einer Membran umhüllt ist. Der Jamming-Übergang wird dann erreicht, indem die Luft aus dem System evakuiert wird, sodass das Granulat aufgrund des Differenzdrucks zwischen dem Inneren des Systems und der Umgebung, auch *Begrenzungsdruck* genannt, durch die Membran komprimiert wird.

Wenn ein mit Granulat gefüllter Behälter vibriert wird, tritt Konvektion auf. Von entscheidender Bedeutung sind dabei die Gravitation und die dissipativen Interaktionen zwischen Granulat und Behälter [7, 8, 9]. Von technischem Interesse ist Konvektion in Granulaten, da sie Einfluss auf Segregation und Vermischung hat [10, 11, 12, 13].

1.2 Der Jamming-Übergang

Die Kontaktzahl z und der Feststoffanteil ϕ sind zwei charakteristische Größen eines Granulats. Die Kontaktzahl ist die durchschnittliche Anzahl der Kontakte pro Partikel. Der Feststoffanteil kann mit

$$\phi = \sum_{i=1}^N \frac{V_i}{V_G} \quad (1)$$

aus den Volumina V_i aller N Partikel im Granulat und dem Gesamtvolumen V_G , das vom Granulat eingenommen wird, berechnet werden. In Abwesenheit von Schubspannung und Fluktuationen tritt der Jamming-Übergang zwischen einem flüssigkeitsähnlichen und feststoffartigen Zustand auf, wenn das Granulat einen kritischen Feststoffanteil ϕ_j erreicht. Bei Erreichen des kritischen Feststoffanteils steigt die Kontaktzahl sprunghaft auf die kritische Kontaktzahl z_j an, und das Granulat hat eine endliche Fließgrenze [14]. Ist der kritische Feststoffanteil überschritten, so steigt die Kontaktzahl mit einem Potenzgesetz der Form $z - z_j \propto (\phi - \phi_j)^\alpha$ an [15, 16]. Ähnliche Potenzgesetze konnten auch für den Druck, mit dem das Granulat komprimiert wird, für die Kräfte zwischen den Partikeln und den Schermodul des Granulats gefunden werden [14, 16, 17].

Der kritische Feststoffanteil und die kritische Kontaktzahl hängen von den Eigenschaften der Partikel ab [16, 18, 19]. Für reibungsfreie Partikel sind ϕ_j und z_j hoch. Mit zunehmender Reibung nehmen sie ab [19, 20]. Ferner beeinflussen auch Prozessparameter wie die Kompressionsgeschwindigkeit mit der das Granulat komprimiert wird oder der Ausgangszustand vor der Kompression die kritischen Parameter [21, 22].

Neben einer Veränderung der Kontaktanzahl und des Feststoffanteils, kann der Jamming-Übergang hervorgerufen werden, wenn die Fließgrenze eines Granulats durch Veränderungen äußerer Schubspannungen über oder unterschritten wird. Oft wird daher ein „Jamming-Phasendiagramm“ wie in Abbildung 1 gezeichnet [4, 16, 23]. In diesem Diagramm ist als dritte Achse die (granulare) Temperatur eingezeichnet, die ein Maß für Fluktuationen der Partikelpositionen ist. Durch Fluktuationen können Kontakte geformt oder unterbrochen werden. Bei hohen Fluktuationen gibt es nicht mehr genug Kontakte, sodass die Fließgrenze null wird. In Granulaten spielen Fluktuationen der Partikelpositionen jedoch keine Rolle [16].

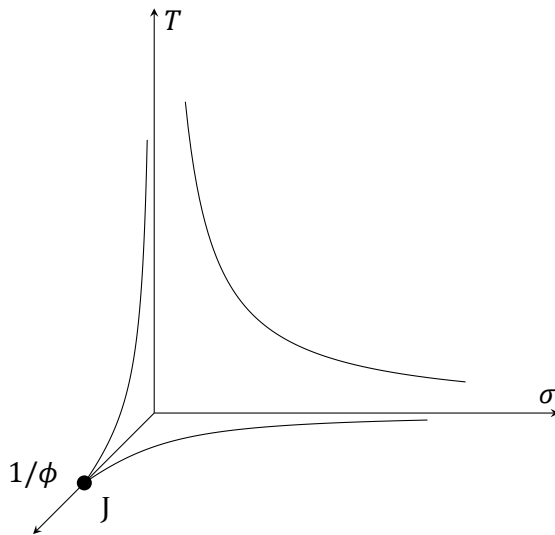


Abbildung 1: Ein „Jamming-Phasendiagramm“ wie in [16]. Die Achsen sind der inverse Feststoffanteil ($1/\phi$), die Schubspannung σ und die Temperatur T als Maß der Fluktuationen

1.3 Struktur der Arbeit

In dieser Arbeit werden Anwendungen des Jamming-Übergangs aus dem Bereich Soft-Robotics, sowie Konvektion in Granulaten unter Bedingungen der Schwerelosigkeit untersucht. Dazu wird auf Simulationen zurückgegriffen. Gegenüber Experimenten bieten Simulationen den Vorteil, dass auch das Innere eines Granulatsystems sowie die Kräfte zwischen einzelnen Partikeln bekannt sind und analysiert werden können. Zudem können in Simulation einzelne (Material-)Parameter kontinuierlich und unabhängig von anderen Parametern variiert werden. Als Simulationsmethode von Granulaten wird in Kapitel 2 die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) vorgestellt.

Diese wird in Kapitel 3 um eine Methode erweitert, sodass auch Membranen mit DEM simuliert werden können. Die Methode bildet Membranen auf Masse-Feder-Systeme (MFS) mit zusätzlichen Dreiecksflächen ab. Letztere werden verwendet, um Kontaktkräfte zwischen einem Granulat und einer Membran zu berechnen.

In Kapitel 4 wird diese Methode verwendet, um Robotergreifer zu simulieren, deren Funktion durch den Jamming-Übergang ermöglicht wird. Insbesondere wird der Einfluss des Granulatmaterials auf die Haltekraft des Greifers untersucht. Über diese spezielle Anwendung des Jamming-Übergangs hinaus wird in Kapitel 5 ein granulares Metamaterial betrachtet. Dabei wird untersucht,

wie die Materialeigenschaften von Granulatpartikeln und Membran sowie der Begrenzungsdruck den Elastizitätsmodul des Metamaterials beeinflussen. Für den Reibungskoeffizienten und den Elastizitätsmodul der Partikel wird zusätzlich der Einfluss auf die Bruchfestigkeit des Balkens betrachtet. Bei dieser weiterführenden Analyse werden auch die Packungseigenschaften und die Deformationsmechanismen des Metamaterials analysiert.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit Konvektion unter Bedingungen der Schwerelosigkeit. Dabei wird auf die Ursache der Konvektion eingegangen und eine bisher unbekannte Konvektion vorgestellt. Diese weist trotz der Schwerelosigkeit keine Symmetrieachse senkrecht zur Bewegungsrichtung auf. Anschließend wird eine Neigung des Granulatbehälters relativ zur Vibrationsrichtung als Ursache weiterer Abweichungen von der erwarteten Konvektion identifiziert.

Kapitel 7 fasst die Forschungsergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf weiterführende Forschungsmöglichkeiten.

2 Diskrete-Element-Simulationen granularer Stoffe

Eine Methode zur Simulation von Granulaten ist die Diskrete-Elemente-Methode (DEM), welche 1979 von Cundall und Strack [24] entwickelt wurde. In DEM werden die Partikel und ihre Wechselwirkungen durch die Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen simuliert. Für jeden Partikel sind drei Translations- und Rotationsfreiheitsgrade zu lösen. Auf einen Partikel i wirken die Kraft

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (2)$$

und das Drehmoment

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{ij}, \quad (3)$$

die sich aus den Interaktionskräften \mathbf{F}_{ij} mit den Partikeln j , den daraus resultierenden Drehmomenten \mathbf{M}_{ij} und externen Kräften $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ wie der Schwerkraft ergeben. Für die Berechnung der Interaktionskräfte zwischen den einzelnen Partikeln gibt es zahlreiche Modelle, die z. B. in den Referenzen [25, 26, 27, 28, 29] beschrieben werden. In dieser Dissertation wird das Hertzsche Kontaktmodell verwendet [30], das nachfolgend erläutert wird.

Gegeben seien zwei viskoelastische Kugeln i und j mit Radius R_i und R_j , die sich an den Positionen \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_j befinden. Diese sind in Kontakt und üben eine Kraft aufeinander aus, falls

$$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > 0. \quad (4)$$

Die Kompression ξ_{ij} gibt die Deformation der Kugeln an und bildet die Grundlage zur Berechnung der Kontaktkraft.

Die Kontaktkraft lässt sich in eine Normalkraft \mathbf{F}_{ij}^n und eine dazu senkrechte Tangentialkraft \mathbf{F}_{ij}^t aufteilen. Die Normalkraft wirkt in Richtung des normalen Einheitsvektors $\hat{\mathbf{r}}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Die Tangentialkraft zeigt entgegen der relativen tangentialen Bewegung. Die Gesamtkraft ist durch die Summe

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}^n + \mathbf{F}_{ij}^t \quad (5)$$

beschrieben.

Die Normalkraft wird mit

$$\mathbf{F}_{ij}^n = \max \left(0, \frac{2E_p \sqrt{R_{ij}^{\text{eff}}}}{3(1 - \nu_p^2)} \left(\xi_{ij}^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} A_p \dot{\xi}_{ij} \sqrt{\xi_{ij}} \right) \right) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (6)$$

berechnet [31], wobei die Maximumsfunktion notwendig ist, um attraktive Kräfte auszuschließen. Der Elastizitätsmodul E_p , die Poissonzahl ν_p und die Dissipationskonstante A_p sind Materialkonstanten der beteiligten Partikel und $R_{ij}^{\text{eff}} = R_i R_j / (R_i + R_j)$ ist deren effektiver Radius. Die Dissipationskonstante A_p kann durch Messung des Restitutionskoeffizienten bei einer definierten Aufprallgeschwindigkeit bestimmt werden [32].

Die Tangentialkraft entsteht durch Reibung zwischen den Partikeln. Um diese zu berechnen, wird eine Feder in Tangentialrichtung aufgespannt, deren Richtung und Ausdehnung durch den Vektor ξ_{ij}^t beschrieben wird. Bei Kontaktbeginn wird die Feder mit einer Ausdehnung von $\xi_{ij}^t = 0$ initialisiert. Danach dehnt sie sich mit der tangentialen Relativgeschwindigkeit am Kontaktpunkt,

$$\dot{\xi}_{ij}^t = (\dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{b}_{ij}) - (\dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji}) - \dot{\xi}_{ij} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \quad (7)$$

aus. Die tangentiale Relativgeschwindigkeit berechnet sich dabei aus den Partikelgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_i$ und $\dot{\mathbf{r}}_j$, den Partikelrotationsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_i$ und $\boldsymbol{\omega}_j$, sowie aus dem Vektor $\mathbf{b}_{ij} = -(R_i - \xi_{ij}/2)\hat{\mathbf{r}}_{ij}$, der vom Mittelpunkt des Partikels i zum Kontaktpunkt zeigt. Um sicherzustellen, dass die Feder ξ_{ij}^t immer in Richtung der momentanen tangentialen Relativgeschwindigkeit zeigt, wird ξ_{ij}^t in jedem Zeitschritt entsprechend rotiert [33]. Die Rückstellkraft der Feder berechnet sich mit

$$\mathbf{F}_{ij}^t = - \min \left(k_{ij}^t \xi_{ij}^t, \mu_p F^n \right) \frac{\xi_{ij}^t}{\xi_{ij}^t}, \quad (8)$$

wobei μ_p der Coulombsche Reibungskoeffizient der Partikel und

$$k_{ij}^t = \frac{8E_p}{3(1 + \nu_p)(2 - \nu_p)} \sqrt{R_{ij}^{\text{eff}} \xi_{ij}} \quad (9)$$

der Proportionalitätsfaktor der Feder ist. Letzterer hängt von der Kompression ξ_{ij} ab und ist konstant, wenn die Kompression konstant ist. Die Minimumsfunktion in Gleichung (8) stellt sicher, dass das Coulombsche Limit

$|\mathbf{F}_{ij}^t| \leq \mu_p |\mathbf{F}_{ij}^n|$ eingehalten wird. Falls der Betrag der Tangentialkraft unter dem Coulombschen Limit liegt, d. h. falls $|\mathbf{F}_{ij}^t| < \mu_p |\mathbf{F}_{ij}^n|$, wird der Kontakt als statisch angesehen. Ein zusätzlicher Dissipationsterm wird addiert, um die tangentielle Bewegung zu dämpfen, die wegen der Simulationstechnik möglicherweise dennoch vorhanden ist. Die Tangentialkraft ist dann durch

$$\mathbf{F}_{ij}^t = -\frac{2}{3} k_{ij}^t \xi_{ij}^t - \gamma_t \sqrt{m_{ij}^{\text{eff}} k_{ij}^t} \xi_{ij}^t \quad (10)$$

gegeben. Die damit neu eingeführten Parameter γ_t und $m_{ij}^{\text{eff}} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ sind die tangentielle Dissipationskonstante und die effektive Masse.

Aus der Tangentialkraft ergibt sich das Drehmoment

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}^t. \quad (11)$$

3 Membranen in DEM Simulationen¹

3.1 Einleitung

In vielen Granulatsystemen sind die Systemgrenzen verformbar und können als elastische Membranen modelliert werden. Prominente Beispiele sind dabei insbesondere im Bereich Soft Robotics zu finden und sind granulare Pfoten [34], granulare Greifer [35] und ähnliche [6].

In derartigen Systemen ist die Dynamik von Granulat und Membran gekoppelt: Die Verformung der Membran (z. B. durch externen Luftdruck) führt zu Kräften auf die Granulartikel. Gleichmaßen üben Granulartikel Kräfte auf die Membran aus, die die Membranverformung beeinflussen. Diese wechselseitigen Interaktionen erschweren eine kombinierte Simulation von Granulartikeln und Membran. Einige Forschungsarbeiten bildeten die Membran daher durch viele bewegliche, unflexible und nicht miteinander verbundene Wanelemente ab [36, 37, 38]. In anderen Arbeiten wurde die Membran durch ein Kraftfeld dargestellt, das auf Partikel wirkte, die mit der Membran in Kontakt gewesen wären [39, 40, 41]. Mit beiden Methoden ist keine realistische Simulation der Membranverformung möglich.

Eine realistische Simulation einer flexiblen Membran kann innerhalb von DEM durch ein Masse-Feder-System (MFS), z. B. [42], oder mit einer Kopplung zwischen der Finite-Elemente-Methode (FEM) und DEM, z. B. [43], realisiert werden. In einem MFS wird eine Membran durch Partikel dargestellt. Die Partikel sind durch lineare oder nichtlineare elastische Federn verbunden, die das elastische Verhalten der Membran beschreiben. Im Gegensatz dazu löst FEM das Elastizitätsproblem einer durch ein Gitter diskretisierten Membran direkt aus den zugrundeliegenden Gleichungen. Daher geht man davon aus, dass die Verformung der Membran mit FEM genauer vorhergesagt werden kann. FEM ist allerdings rechenintensiver als ein MFS und benötigt eine Neuberechnung des Gitters, wenn topologische Veränderungen (z. B. durch Risse) auftreten [44, 45, 46]. Ferner kann ein MFS direkt in DEM-Simulationen integriert werden, sodass eine aufwendige Kopplung zwischen zwei Simulationsmethoden (z. B. FEM und DEM) nicht notwendig ist. Diese Arbeit beschränkt sich deshalb auf die Verwendung von MFS.

¹ Dieses Kapitel basiert auf der Publikation [P1], die der Autor dieser Dissertation als Hauptautor verfasst hat, und ist größtenteils eine Übersetzung dieser Publikation.

In einem MFS werden die Kontakte zwischen einer Membran und einem Granulat durch die Kontakte zwischen den Partikeln der Membran und den Partikeln des Granulats beschrieben. Hierbei ist die Wahl der Membranstruktur entscheidend: Falls die Gitterelemente zu groß gewählt sind, können Partikel die Membran durchdringen. Dementsprechend sollte die Maschenweite dem Durchmesser der kleinsten Partikel entsprechend gewählt werden [42, 47]. Dies ist aus mehreren Gründen problematisch. Erstens kann sich im Verlauf der Simulation durch Interaktion zwischen der Membran und den Granulatpartikeln die Maschenweite ändern. Zweitens kann bei der Simulation von Partikeln mit unterschiedlicher Größe die notwendige Anzahl der Membranpartikel und Federn sehr groß sein und zu einer ineffizienten Simulation führen.

Dieses Problem kann durch eine Vergrößerung der Membranpartikel gelöst werden, z. B. durch überlappende Membranpartikel [48], was jedoch zu einer unerwünschten Dicke der Membran führt. Zudem ist in MFS-Modellen die Berechnung von tangentialen (Reibungs-)Kräften entlang der Membran problematisch, da die Kontakte zwischen der Membran und den Granulatpartikeln von der konkreten Anordnung der Membranpartikel abhängen.

Dieses Kapitel beschreibt einen neuartigen Typ von MFS, der die beschriebenen Probleme der MFS löst, die Simulation undurchdringlicher, flexibler Grenzen ermöglicht und dabei nur eine moderate Anzahl von Membranpartikeln erfordert. Dieses neuartige Membranmodell ist in der Software *MercuryDPM* implementiert worden und ist dort verfügbar [P2].

3.2 Modellbeschreibung

In einem MFS wird eine Membran durch Partikel dargestellt, die durch viskoelastische Federn verbunden sind. Die Konnektivität kann durch ein Gitter gegeben werden (Abbildung 2). Diese partikelbasierte Darstellung der Membran ermöglicht eine einfache Integration in DEM, da sich die Behandlung von Membranpartikeln und Granulatpartikeln nur in den auf sie wirkenden Kräften unterscheidet, ihre Dynamik aber identisch behandelt werden kann. Die Kraft auf die Membranpartikel resultiert aus der viskoelastischen Dehnung der Membran, den Momenten aufgrund der Biegung der Membran, der Wechselwirkung der Granulatpartikel mit der Membran und den externen Kräften. Die Gesamtkraft geht aus der Summe dieser vier Beiträge hervor, die in den folgenden Unterabschnitten erklärt werden.

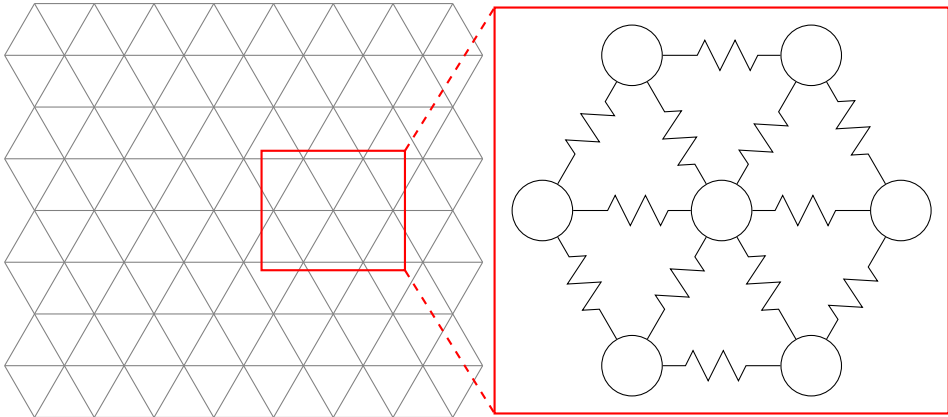


Abbildung 2: Skizze des Masse-Feder-Systems

3.2.1 Dehnung

Man betrachte zwei benachbarte Membranpartikel i und j an den Positionen \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_j , die sich mit den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_i$ und $\dot{\mathbf{r}}_j$ bewegen. Dazu definiert man die relativen Größen

$$\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} \equiv \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j, \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{ij} \equiv \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (14)$$

Beide Partikel sind durch eine viskoelastische Feder verbunden, sodass auf Membranpartikel i die Kraft

$$\mathbf{F}_{ij}^{\text{sp}} = \hat{\mathbf{r}}_{ij} \left[k_{\text{sp}} (r_{ij} - r_{ij}^0) - 2\gamma_{\text{sp}} \sqrt{k_{\text{sp}} m_{ij}^{\text{eff}}} \hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ij} \right] \quad (15)$$

wirkt. Dies entspricht der Kraft eines gedämpften harmonischen Oszillators mit Ruhelänge r_{ij}^0 , effektiver Masse $m_{ij}^{\text{eff}} = m_i m_j / (m_i + m_j)$, Dämpfungskoeffizient γ_{sp} und Federkonstante k_{sp} .

Der Wert der Konstante k_{sp} kann aus der endlichen Dicke d und dem Elastizitätsmodul E_m der abzubildenden Membran berechnet werden. Aus diesen

Angaben und unter der Bedingung, dass die Membran aus einem Dreiecksgitter mit einer hexagonalen Einheitszelle besteht, ergibt sich für die idealisierte zweidimensionale MFS-Membran mit verschwindender Dicke [49, 50]

$$k_{\text{sp}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_m d. \quad (16)$$

3.2.2 Biegeeigenschaften

Vier benachbarte Membranpartikel (Abbildung 3) an den Positionen \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 und \mathbf{r}_4 definieren die Ecken zweier Dreiecke mit den Normalen

$$\mathbf{n}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \quad (17)$$

$$\mathbf{n}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \quad (18)$$

Der Winkel θ_{12} zwischen den Normalenvektoren, definiert durch

$$\cos \theta_{12} \equiv \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}, \quad (19)$$

charakterisiert die Biegung der Dreiecke an ihrer gemeinsamen Kante $\mathbf{r}_{43} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3$. Das der Biegung entgegenwirkende Rückstellmoment kann durch

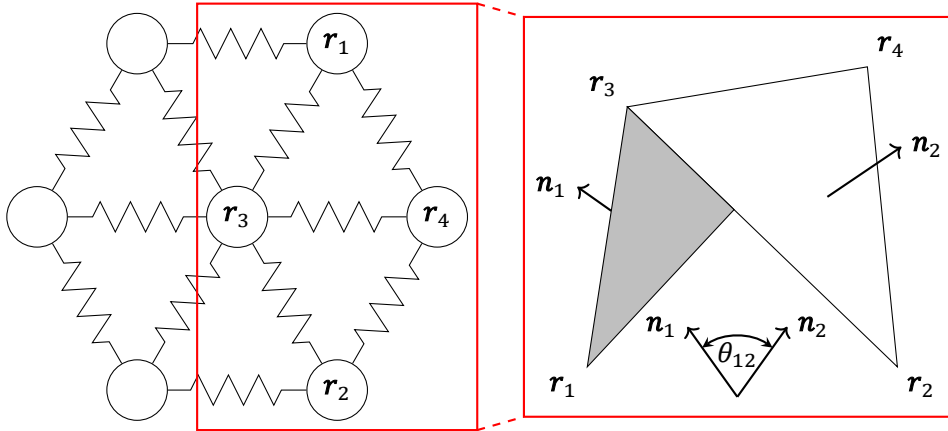


Abbildung 3: Die Verformung der Membran wird durch den Winkel θ_{12} zwischen den Normalenvektoren der benachbarten Dreiecke $\triangle 134$ und $\triangle 243$ beschrieben. θ_{12} ist in dieser Skizze stark übertrieben

elastische und dissipative Kräfte ausgedrückt werden, die auf die beteiligten Membranpartikel $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ wirken. Diese werden mit

$$\mathbf{F}_i^{\text{el}} = k_{\text{Biegung}}^{\text{el}} \frac{|\mathbf{r}_{43}|^2}{|\mathbf{n}_1| + |\mathbf{n}_2|} \left(\sin \frac{\theta_{12}}{2} - \sin \frac{\theta_{12}^0}{2} \right) \mathbf{u}_i \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_i^{\text{diss}} = -k_{\text{Biegung}}^{\text{diss}} |\mathbf{r}_{43}| \dot{\theta}_{12} \mathbf{u}_i \quad (21)$$

berechnet [51]. Hier sind $k_{\text{Biegung}}^{\text{el}}$ und $k_{\text{Biegung}}^{\text{diss}}$ Materialparameter, und θ_{12}^0 ist der Winkel zwischen den Dreiecken im Ruhezustand. In Gleichung (20) wird der Faktor $\frac{|\mathbf{r}_{43}|^2}{|\mathbf{n}_1| + |\mathbf{n}_2|}$ verwendet, damit die Kraft mit der Anisotropie der Dreiecke skaliert. Der Sinus wird verwendet, da er bei dem Winkel $\theta_{12} = -\pi$ ein Minimum hat, ohne Biegung ($\theta_{12} = 0$) 0 ist und bei der Biegung $\theta_{12} = \pi$ maximal ist. In Gleichung (21) ist der Faktor $|\mathbf{r}_{43}|$ notwendig, damit $k_{\text{Biegung}}^{\text{diss}}$ unabhängig vom Gitter gewählt werden kann. Die Vektoren \mathbf{u}_i sind durch die Gleichungen

$$\mathbf{u}_1 = |\mathbf{r}_{43}| \frac{\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|^2}, \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_2 = |\mathbf{r}_{43}| \frac{\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|^2}, \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \cdot \mathbf{r}_{43}}{|\mathbf{r}_{43}|} \frac{\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|^2} + \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \cdot \mathbf{r}_{43}}{|\mathbf{r}_{43}|} \frac{\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|^2}, \quad (24)$$

$$\mathbf{u}_4 = -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_{43}}{|\mathbf{r}_{43}|} \frac{\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|^2} - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_{43}}{|\mathbf{r}_{43}|} \frac{\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|^2} \quad (25)$$

gegeben. Die Vektoren sind Linearkombinationen der Dreiecksnormalen, sodass die Kräfte das Dehnungsverhalten der Dreiecke nicht beeinflusst. Da die Kräfte aufgrund der Biegung keine Verschiebung der Dreiecke zur Folge haben sollten, ist die Summe der Vektoren 0. Die Vektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 sind reziprok proportional zur Entfernung der Partikel \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 zur gemeinsamen Kante \mathbf{r}_{43} der Dreiecke. Dadurch ist das durch die Biegung verursachte Rückstellmoment unabhängig von der Größe der Gitterelemente.

Die Gesamtkraft auf einen Membranpartikel aufgrund der Membranbiegung, ergibt sich aus der Summe der entsprechenden Kräfte aufgrund der Biegung von Dreiecken, bei denen der Partikel eine Ecke darstellt.

3.2.3 Granulat-Membran-Interaktion

Die Wechselwirkung zwischen einer Membran und einem Granulat wird anhand dreieckiger Flächen berechnet, die zwischen den zeitabhängigen Positionen benachbarter Membranpartikel aufgespannt sind (Abbildung 4). Die Wechselwirkung des Granulats mit der Membran ist durch Kontakte zwischen den Granulartpartikeln und den Dreiecken beschrieben. Dies stellt unabhängig von der Größe der Partikel und der Verformung der Membran sicher, dass die Membran undurchdringlich ist. Ein ähnlicher Ansatz wurde in [52] verfolgt, um die Zwischenräume eines Gitters aus Zylindern zu schließen.

Kontakte zwischen einem Dreieck, dessen Eckpunkte durch die Positionen \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 und \mathbf{r}_3 gegeben sind, und einem Granulartpartikel werden abhängig vom Kontaktpunkt \mathbf{x}_c als Ecken-, Kanten- oder Flächenkontakt klassifiziert:

$$\begin{aligned}
 &\text{als Eckenkontakt falls } \mathbf{x}_c = \mathbf{r}_i; i \in \{1, 2, 3\} \\
 &\text{als Kantenkontakt falls } (\mathbf{x}_c - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0}; \\
 &\quad i, j \in \{1, 2, 3\}; i \neq j \\
 &\text{als Flächenkontakt } \quad \text{sonst}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Falls ein Kontakt zwischen einem Granulartpartikel und einem Dreieck a ein Ecken- oder Kantenkontakt ist, müssen die Kontakte zwischen dem Granulartpartikel und den Nachbardreiecken b überprüft werden, die sich die Ecke bzw. die Kante, auf der der Kontaktpunkt liegt, mit Dreieck a teilen [53]. Ist der Kontakt zwischen mindestens einem Nachbardreieck b und dem Granulartpartikel nach Tabelle 1 ein Kontakt mit höherer Priorität als der Kontakt mit Dreieck a , so wird keine Kraft aufgrund des Kontakts zwischen dem Partikel und Dreieck a berechnet. Haben die Kontakte zwischen dem Granulartpartikel und allen Nachbardreiecken b die gleiche Priorität wie der Kontakt mit Dreieck a , wird die Kraft nur für einen dieser Kontakte berechnet.

Sobald der Kontaktpunkt definiert ist, wird die Kraft gemäß dem in Kapitel 2 angegebenen Kontaktmodell berechnet. Die Geschwindigkeit der Membran am Kontaktpunkt, die in die Kraftberechnung einfließt, wird aus den

Tabelle 1: Priorität der Kontaktart

| | Eckenkontakt | Kantenkontakt | Flächenkontakt |
|-----------|--------------|---------------|----------------|
| Priorität | 1 | 2 | 3 |

Geschwindigkeiten der Membranpartikel interpoliert. Dazu werden die baryzentrischen Koordinaten w_1 , w_2 , und w_3 des Kontaktpunkts \mathbf{x}_c berechnet, sodass die Bedingungen

$$\mathbf{x}_c = w_1 \mathbf{r}_1 + w_2 \mathbf{r}_2 + w_3 \mathbf{r}_3, \quad 1 = w_1 + w_2 + w_3 \quad (27)$$

eingehalten werden. Hier sind \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , und \mathbf{r}_3 die Positionen der Eck- bzw. Membranpartikel des Dreiecks. Die Geschwindigkeit der Membran, $\mathbf{v}_{\text{Membran}}$, am Kontaktpunkt erhält man mit

$$\mathbf{v}_{\text{Membran}}(\mathbf{x}_c) = w_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + w_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + w_3 \dot{\mathbf{r}}_3. \quad (28)$$

Die Kraft auf einen Membranpartikel $i \in 1, 2, 3$ des Dreiecks kann mit

$$\mathbf{F}_i = -w_i \mathbf{F}_c \quad (29)$$

berechnet werden, wobei \mathbf{F}_c die Kraft ist, die wegen des Kontakts auf den Granulatpartikel wirkt. Abbildung 4 skizziert dieses Vorgehen. Die Positionen und Geschwindigkeiten der Membranpartikel und damit die Dynamik der Membran werden durch numerische Integration auf die gleiche Weise wie bei den Granulatpartikeln ermittelt.

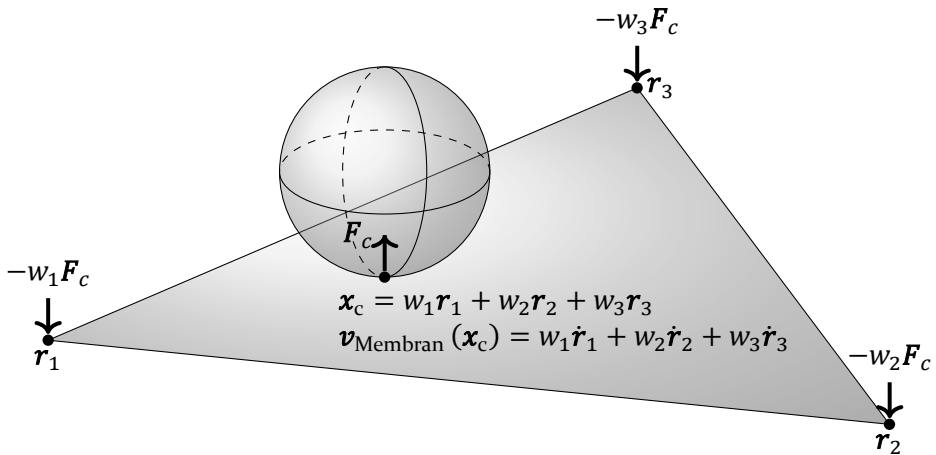


Abbildung 4: Skizze eines Kontakts zwischen einem Granulatpartikel und einer Dreiecksfläche. Die resultierende Kraft \mathbf{F}_c wird auf die beteiligten Membranpartikel \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 gemäß den baryzentrischen Gewichten w_1 , w_2 , und w_3 des Kontaktpunkts \mathbf{x}_c in Bezug auf die Positionen der Membranpartikel verteilt

Die Auswahlregeln in Kombination mit der baryzentrischen Aufteilung der Kraft führen zu glatten, physikalisch plausiblen Kräften, die auf die Membranpartikel wirken [53].

Die Kontakte der Membran mit sich selbst können aus den Kontakten zwischen den Membranpartikeln und den Dreiecken berechnet werden.

3.2.4 Externe Kräfte

Externe Kräfte werden direkt auf die Membranpartikel angewendet. Für einen Differenzdruck p zwischen beiden Seiten einer Membran wird für jedes Dreieck die aufgrund des Drucks wirkende Kraft berechnet und anteilig auf die Membranpartikel verteilt. Für ein Dreieck a mit der Fläche A_a und dem Normalen-Einheitsvektor \hat{n}_a berechnet sich die auf das Dreieck wirkende Kraft mit

$$\mathbf{F}_a = A_a p \hat{n}_a. \quad (30)$$

Dabei ist \hat{n}_a so definiert, dass die Kraft von der Membran in Richtung der Seite zeigt, an der der Druck geringer. Für einen Membranpartikel i erhält man die wirkende Kraft durch Summierung der Kraftbeiträge der zugehörigen Dreiecke:

$$\mathbf{F}_i = \sum_a \frac{1}{3} \mathbf{F}_a \quad (31)$$

Der Faktor $1/3$ ist notwendig, da zu jedem Dreieck drei Membranpartikel gehören, auf die die Kraft verteilt wird.

3.3 Anwendungen

In diesem Unterabschnitt werden zwei Anwendungsbeispiele präsentiert. Beide Beispiele werden einmal mit dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen Membranmodell (MFS_{Wand}) simuliert, bei dem Kontakte zwischen Membran und Granulat anhand von Dreiecken berechnet werden, und einmal mit dem MFS-Modell ($MFS_{Partikel}$) [42], bei dem die Kontakte zwischen Membran und Granulat durch die Kontakte zwischen Membran- und Granulatpartikel gegeben sind.

3.3.1 Triaxialversuch

Ein Triaxialversuch wird zur Untersuchung der mechanischen Eigenschaften von Granulaten verwendet. Abbildung 5 skizziert einen solchen Versuch. In einem Triaxialversuch wird ein Granulat von einer zylindrischen Membran umhüllt, die oben und unten von zwei parallelen Platten begrenzt ist. Auf die Membran wird ein Differenzdruck p_c zwischen dem von der Membran umhüllten Granulat und der Umgebung aufgebracht. Dieser Druck wird als Begrenzungsdruck bezeichnet. Die Platten werden parallel zueinander verschoben, bis sie den Abstand $h = h_0$ haben, und das Granulat den Druck $p_{\text{Platten}} = p_c$ auf sie ausübt. Anschließend werden die Platten mit konstanter Relativgeschwindigkeit v_{Platten} zueinander bewegt, und die Dehnung $\epsilon = \log(h_0/h)$ und die entstehende Differenzspannung $\sigma_d = p_{\text{Platten}} - p_c$ werden aufgezeichnet.

In der Simulation des Triaxialversuchs werden die Platten durch starre Wände und die Membran durch ein MFS dargestellt. Dabei werden für $\text{MFS}_{\text{Partikel}}$ die Membranpartikel im Abstand $s = 1,3 \text{ mm}$ platziert, sodass der Radius eines Membranpartikels etwa $1/3$ des Radius eines Granulatpartikels beträgt. Dieser Wert ist ein Kompromiss zwischen niedrigen numerischen Kosten und einer glatten Membran, die das Eindringen von Granulatpartikeln verhindert [42,

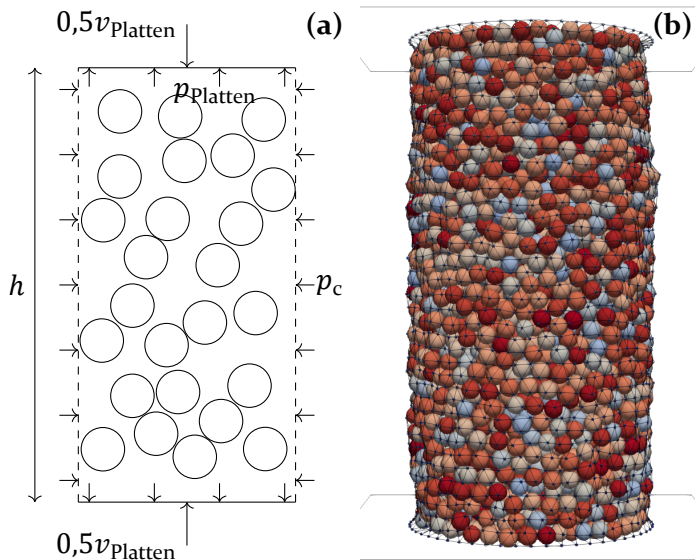


Abbildung 5: Abbildung (a) skizziert einen Triaxialversuch. Gestrichelte Linien symbolisieren die Membran, durchgängige Linien die Platten. Abbildung (b) zeigt eine Momentaufnahme aus einer Simulation

47]. Für MFS_{Wand} wird der Abstand $s = 4,0$ mm verwendet, weil die Membran konstruktionsbedingt eine glatte Oberfläche hat und undurchdringlich ist.

Um die Anfangsbedingungen zu erzeugen, werden kleine Granulatpartikel zufällig innerhalb des Zylinders aus Membran und Wänden platziert, sodass sie einander nicht berühren. Anschließend wird der Lubachevsky-Stillinger-Algorithmus [54] angewandt, durch den der Radius der Partikel schrittweise erhöht wird, bis sich das Granulat nicht weiter ausbreiten kann.

Der Triaxialversuch wird mit der Geschwindigkeit $v_{\text{Platten}} = 0,05$ m/s und dem Begrenzungsdruck $p_c = 100$ kPa durchgeführt. Tabelle 2 gibt die verwendeten Materialparameter an. Die Biegeparameter sind mit $\gamma_{\text{sp}} \approx 0,15$, $k_{\text{Biegung}}^{\text{el}} = 10^{-3}$ N/m und $k_{\text{Biegung}}^{\text{diss}} = 10^{-4}$ Ns/m gegeben. Anhand der Anfangsflächen der Dreiecke werden mit den Gleichungen (20)-(25) die Biegekräfte der Membran berechnet.

Tabelle 2: Materialparameter, die in der Simulation verwendet werden

| | Partikel | Membran |
|-----------------------------|---------------------|-------------------|
| Radius R / Dicke d [mm] | 2,3 bis 2,7 | 0,3 |
| Elastizitätsmodul E [Pa] | $4,6 \cdot 10^{10}$ | $1,25 \cdot 10^6$ |
| Poissonzahl ν | 0,245 | 1/3 |
| Reibungskoeffizient μ | 0,25 | 1,2 |

Zwei verschiedene Systeme werden betrachtet: *Fall 1* – ein Zylinder mit Anfangshöhe 100 mm und Radius 25 mm, und *Fall 2* – ein Zylinder mit Anfangshöhe 140 mm und Radius 35 mm. Die Anzahl der Membran- und der Granulatpartikel ist in Tabelle 3 gegeben. Beide Geometrien und Membranmodelle wurden mit zwei zufälligen Anfangsbedingungen A und B simuliert, die sich in den initialen Positionen der Granulatpartikel unterscheiden.

Abbildung 6 zeigt die Differenzspannung σ_d als Funktion der Dehnung ϵ . Die Computerzeit, die benötigt wird, um eine Laborzeit von 20 ms zu simulieren, ist in Tabelle 4 angegeben. Die unterschiedlichen Membrandarstellungen MFS_{Partikel} und MFS_{Wand} führen nicht zu signifikanten Unterschieden im Spannungs-Dehnungsverhalten. Gleichzeitig ermöglicht die reduzierte Anzahl von Partikeln in MFS_{Wand} , verglichen mit MFS_{Partikel} , eine um den Faktor 5 schnellere Simulation.

Tabelle 3: Anzahl der Granulat- und Membranpartikel in den Simulationen

| | Membranpartikel | | Granulatpartikel | |
|---------------------------|-----------------|--------|------------------|--------|
| | Fall 1 | Fall 2 | Fall 1 | Fall 2 |
| MFS_{Partikel}^A | 10440 | 20374 | 1689 | 4806 |
| MFS_{Partikel}^B | 10440 | 20374 | 1692 | 4770 |
| MFS_{Wand}^A | 1131 | 2214 | 1716 | 4645 |
| MFS_{Wand}^B | 1131 | 2214 | 1731 | 4694 |

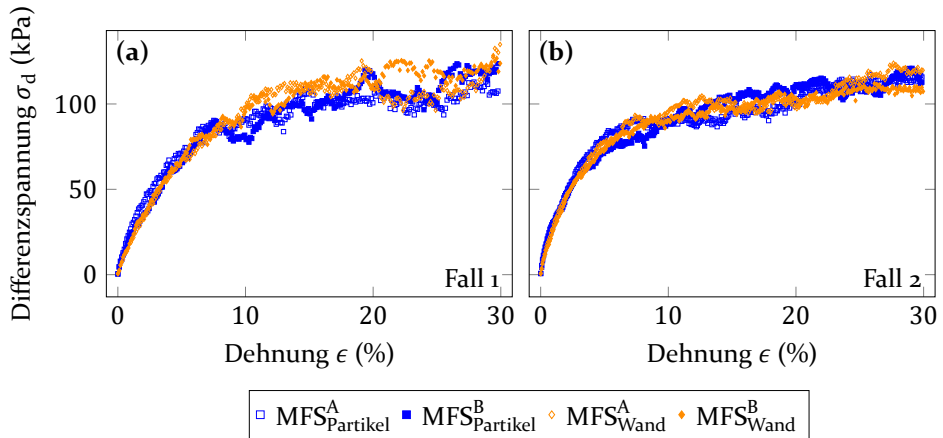
Abbildung 6: Differenzspannung σ_d als Funktion der axialen Dehnung ϵ . (a) Fall 1 mit Anfangshöhe 100 mm und Radius 25 mm. (b) Fall 2 mit Anfangshöhe 140 mm und Radius 35 mm

Tabelle 4: Computerzeit, die für verschiedene Membrandarstellungen gemessen wurde, um eine Laborzeit von 20 ms zu berechnen. Die Simulationen wurden auf einem Computer mit AMD Epyc 7702 Prozessor und 8 Threads durchgeführt

| | Fall 1 | Fall 2 |
|-------------------------|------------------|------------------|
| MFS_{Partikel} | ≈ 32 min | ≈ 96 min |
| MFS_{Wand} | ≈ 5 min | ≈ 17 min |

3.3.2 Reibungstest

Mit einem Gleitversuch kann die Glätte einer Membran, die durch das in Abschnitt 3.2 beschriebene Modell repräsentiert wird, aufgezeigt werden. In diesem Versuch wird eine Membran durch MFS_{Partikel} mit Membranpartikeln im Abstand $s = 1,33 \text{ mm}$ und mit Radius $R = 0,67 \text{ mm}$, oder durch MFS_{Wand} mit Dreiecken der Seitenlänge $s = 1,33 \text{ mm}$ dargestellt.

Für den Test bewegt sich eine Kugel mit Radius $R = 2 \text{ mm}$ auf der Membran mit konstanter Geschwindigkeit $v = 0,05 \text{ m/s}$ in horizontaler Richtung. Dabei ist die freie Bewegung der Kugel auf die vertikale Koordinate senkrecht zur Membran beschränkt. Während des Tests werden die Reibungskraft F_R entgegen der horizontalen Bewegungsrichtung und die vertikale Position aufgezeichnet. Abbildung 7 skizziert den Test. Abbildung 8 zeigt die aufgezeichneten Größen. Mit MFS_{Partikel} oszillieren sowohl die Reibungskraft als auch die vertikale Position. Mit MFS_{Wand} kann stattdessen eine konstante vertikale Position sowie eine konstante Reibungskraft beobachtet werden.

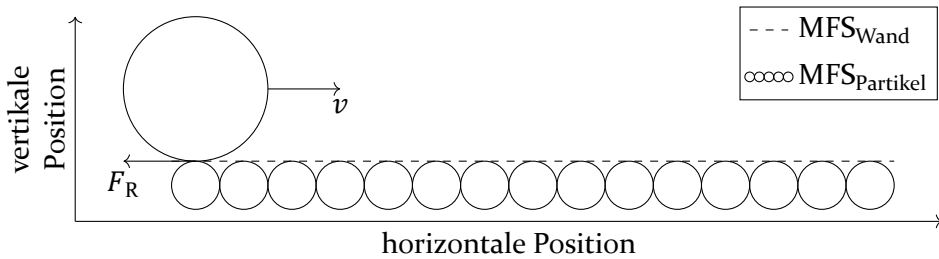


Abbildung 7: Skizze des Reibungstests

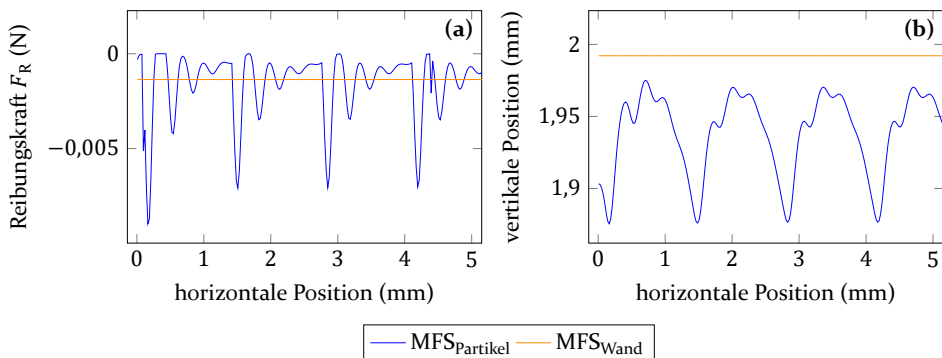


Abbildung 8: Die Reibungskraft, die ein Partikel verspürt, wenn es sich in horizontaler Richtung auf der Oberfläche einer Membran bewegt (a) und die vertikale Position (b) als Funktion der horizontalen Position für beide betrachtete Membranmodelle. Der Rotationsfreiheitsgrade wurden unterdrückt

3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Membranmodell eingeführt, das herkömmliche MFS durch Dreiecksflächen erweitert, die zur Kontaktbestimmung zwischen Granulat und Membran verwendet werden. Dies macht die Membran dünn, da die Kraft zwischen Granulat und Membran nicht mehr vom Radius der Membranpartikel abhängt. Durch die Dreiecke ist die Oberfläche der Membran geschlossen, sodass die Anzahl der Partikel im MFS unabhängig vom Granulat gewählt werden kann. Dadurch können Simulationen durch Verminderung der Partikelanzahl bei gleichbleibendem Ergebnis beschleunigt werden. Dies konnte anhand eines Triaxialversuchs demonstriert werden. Ferner ist die Membran wegen der Dreiecksflächen glatt, sodass eine realistische Berechnung der Reibungskräfte möglich ist. Dies wurde durch einen Reibungstests bestätigt.

4 Granulare Greifer für Soft Robotics¹

4.1 Einleitung

Konventionelle Roboter Greifer bestehen häufig aus Fingern, die an ein Objekt angelegt werden, um dieses durch Reibungskräfte oder Formschluss zu manipulieren. Alternative Greifer wie Magnet- und Vakuumgreifer machen sich Material- oder Oberflächeneigenschaften der zu greifenden Objekte zunutze. Den erwähnten Ansätzen ist gemein, dass sie genau auf ein zu greifendes Objekt eingestellt werden müssen und Schwierigkeiten haben, wenn Material, Form oder Oberfläche eines Objekts unbekannt sind oder sich bei wechselnden Objekten unterscheiden. Um dieses Problem zu lösen, erfanden Brown u. a. einen neuartigen Greifer, der auf dem Prinzip des Jamming-Übergangs in Granulaten beruht [35] und daher granularer (Roboter-)Greifer genannt wird.

Der granulare Greifer besteht aus einem elastischen Behälter, der mit Granulat gefüllt ist. Im Grundzustand lässt sich der Greifer verformen und an ein zu greifendes Objekt anpassen. Durch Anlegen eines Differenzdrucks zwischen dem Inneren des Greifers und der Umgebung, auch Begrenzungsdruck genannt, wird der angepasste Greifer in den Jamming-Zustand versetzt, wodurch er sich nicht mehr verformen und das Objekt manipulieren kann. Im Jamming-Zustand erfolgt die Interaktion mit dem Objekt durch drei verschiedene Mechanismen [35]:

1. Der Greifer passt sich so an das Objekt an, dass es zu Formschluss kommt. Um das Objekt vom Greifer zu trennen, muss er sich verformen.
2. Die Membran des Greifers passt sich an das Objekt an, sodass keine Luft mehr zwischen den Greifer und das Objekt strömen kann. Versucht man das Objekt vom Greifer zu entfernen, entsteht ein Unterdruck zwischen Membran und Objekt, der dem Entfernen des Objekts entgegenwirkt.
3. Der Greifer hält das Objekt durch die Reibungskraft zwischen Membran und Objekt in Position.

Die verschiedenen Mechanismen tragen verschieden zur maximalen Haltekraft bei. So konnten Brown u. a. [35] zeigen, dass mögliche Haltekraften aufgrund von Formschluss und Unterdruck diejenigen durch Reibung deutlich übersteigen.

¹ Dieses Kapitel basiert auf dem Simulationsteil der Publikation [P3], der der Arbeit des Autor dieser Dissertation entstammt.

Die Haltekräfte und Haltemechanismen werden durch die Eigenschaften der Granulatpartikel und der Membran beeinflusst [6, 55, 56, 57, 58, 59]. Um die Formeigenschaften der Granulatpartikel bzw. der Membran zu optimieren, setzten Howard u. a. [59, 60] auf evolutionäre Algorithmen. Abgesehen von Material- und Formeffekten wurde gezeigt, dass Verflüssigung des Granulates durch Überdruck oder Vibrationen die Haltekräfte und die Zuverlässigkeit des Greifers erhöhen [61, 62, 63], und auch der Füllstand des Greifers die Haltemechanismen und die Haltekraft beeinflusst [64]. Weitere Arbeiten demonstrierten anhand von Unterwasser- [64, 65] und Krananwendungen [66] die Universalität des granularen Robotergrifiers, der an der Schwelle zur industriellen Anwendung steht [55].

Trotz zahlreicher Untersuchungen gab es bislang keine systematische Analyse des Einflusses des Elastizitätsmoduls der Granulatpartikel auf die Haltekraft des Greifers. Diese wird in diesem Kapitel mit einer Simulation des Greifers durchgeführt. Anschließend wird der beobachtete Effekt mit einer Simulation eines vereinfachten Modells des Greifers erklärt und mit einem Kontinuumsmodell verglichen.

4.2 Granulare Greifer mit weichen Partikeln

Bisherige Simulationen des granularen Robotergrifiers von Meuleman u. a. [67] und Fitzgerald u. a. [41] stellten die Membran durch ein Kraftfeld dar, das auf Partikel wirkte, die mit der Membran in Kontakt gewesen wären. Damit konnte eindrucksvoll demonstriert werden, dass DEM geeignet ist, den granularen Greifer mittels Simulationen zu analysieren und zu verbessern.

Ein Kraftfeld kann die elastische Membran und die Interaktion zwischen Greifer und Objekt durch die Membran jedoch nicht realistisch darstellen. Eine realistische Membrandarstellung ist notwendig, um den granularen Robotergrifiers realistisch simulieren zu können [6]. In diesem Kapitel wird daher auf das in Kapitel 3 beschriebene Membranmodell zurückgegriffen.

Das für die Membransimulation notwendige regelmäßige halbkugelförmige Gitter kann aus einem Ikosaeder erzeugt werden [68]. Der Vorgang ist in Abbildung 9 dargestellt. Die Dreiecke des Ikosaeders werden schrittweise durch Unterteilung der Kanten in kleinere Dreiecke zerteilt. Nach jedem Schritt werden die dabei neu entstandenen Ecken auf die Umkugel des Ikosaeders projiziert. Bei geschickter Zerteilung entstehen Kanten entlang des Äquators der Kugel, sodass diese in zwei gleich große Halbkugeln geteilt werden kann.

Da alle Dreiecke dieser Halbkugel, die keine der originalen Ecken des Ikosaeders enthalten, in Hexagonen angeordnet sind [69], eignet sich das Gitter gut für die hier verwendete Membrandarstellung.

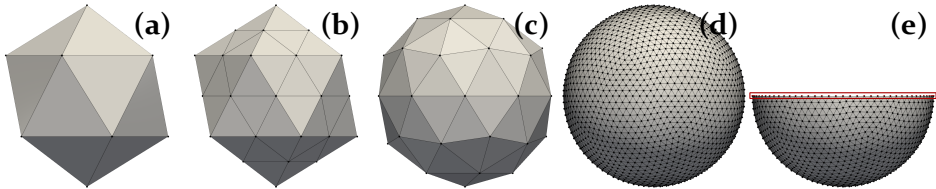


Abbildung 9: Das Erstellen des halbkugelförmigen Gitters der Greifermembran. Einzelabbildungen zeigen den initialen Ikosaeder (a), die erste Unterteilung der Dreiecke (b), die Projektion der neuen Ecken auf die Umkugel (c), die fertige Kugel (d) und die verwendete untere Hälfte der Kugel (e). Die rot umrahmten roten Punkte in Abbildung (e) geben die Position der fixierten Membranpartikel an

Für die Simulation des granularen Greifers wird eine Membran aus 1321 Membranpartikeln und mit Radius $R_{\text{Greifer}} = 40 \text{ mm}$ mit der Öffnung nach oben platziert. Membranpartikel entlang der Öffnung werden fixiert (Abb. 9e), um die Membran in Position zu halten. Ein Wandelement schließt die Membran nach oben hin ab. Das Granulat des Greifers wird durch zufällige Platzierung unter Schwerkraftbedingungen in den Greifer eingefüllt. Während dieses Vorgangs werden die nicht fixierten Membranpartikel auf dem Radius $1,25 R_{\text{Greifer}}$ gehalten, um mehr Granulat einfügen zu können. Nach dem Einfügen der Partikel werden die Ruhelängen der Membranfedern um 12,5% verkleinert, sodass die Membran unter Spannung steht. Nach einer Relaxationszeit wird schließlich eine Kugel mit Radius R_{Objekt} als zu greifendes Objekt mittig unter dem Greifer platziert.

Der Simulationsablauf des Greifvorgangs ist in Abbildung 10 dargestellt und besteht aus mehreren Schritten. Zuerst wird das Objekt mit konstanter Geschwindigkeit $v_{\text{Objekt}}^{\text{auf}} = 10 \text{ mm/s}$ und unter Verformung des Greifers nach oben bewegt, bis eine Durchdringungstiefe von $t_{\text{dd}} = 28 \text{ mm}$ (Abbildungen 10a und 10b) erreicht wird. Nach Relaxation des Systems wird die Membran des Greifers schrittweise mit dem Begrenzungsdruck $p_{\text{Vak}} = 90 \text{ kPa}$ beaufschlagt, sodass das von der Membran umschlossene Granulat komprimiert wird. Im letzten Schritt wird das Objekt mit konstanter Geschwindigkeit $v_{\text{Objekt}}^{\text{ab}} = 2,5 \text{ mm/s}$ nach unten bewegt, bis es sich vom Greifer löst. Während des gesamten Vorgangs wird die zwischen dem Greifer und dem Objekt wirkende Kraft aufgezeichnet. Die maximale Kraft F_h während der Abwärtsbewegung des Objekts wird als (maximale) Haltekraft angegeben und ist in Abbildung 11 mit einem Beispielkraftverlauf dargestellt.

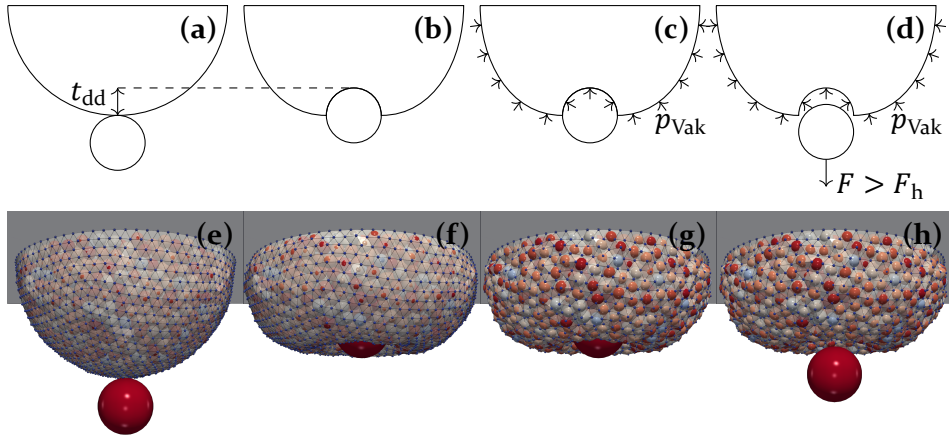


Abbildung 10: Die Funktionsweise des granularen Robotergreifers. Teilbilder (a, e) zeigen den Greifer mit einem zu greifenden Objekt. Im ersten Schritt wird der Greifer auf das Objekt aufgedrückt, wobei er sich verformt und an das Objekt anpasst (b, f). Anschließend wird der Greifer mit Unterdruck beaufschlagt und verfestigt sich (c, g). Schließlich kann der Greifer das Objekt mit einer maximalen Kraft F_h anheben, bevor er den Halt verliert (d, h)

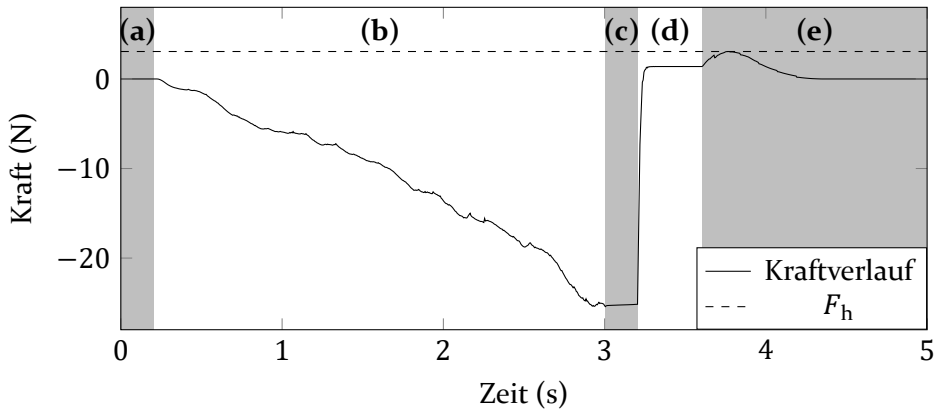


Abbildung 11: Die Kraft zwischen Objekt und Greifer im Verlauf eines Greifprozesses. Einzelne Abschnitte heben die verschiedenen Schritte hervor: (a) der Ausgangszustand, (b) die Aufwärtsbewegung des Objekts, (c) eine Relaxationsphase, (d) das Beaufschlagung des Begrenzungsdrucks, (e) die Abwärtsbewegung des Objekts

Diese Simulation wird verwendet, um den Einfluss des Elastizitätsmoduls der Granulatpartikel auf die Haltekraft des granularen Robotergreifers zu untersuchen. Die Materialparameter der Simulation sind in Tabelle 5 angegeben.

Abbildung 12 zeigt den resultierenden Verlauf der Haltekraft. Bei harten Granulatpartikeln ($E_p \approx 100$ MPa) kann der Greifer nur eine geringe Haltekraft aufbringen. Wird das Partikelmaterial weich gewählt, ist die Haltekraft

Tabelle 5: Materialparameter der Robotergriffersimulation

| | Granulatpartikel | Objekt | Membran |
|---------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Radius R / Dicke d | 1,9 bis 2,1 mm | 10 mm | 0,3 mm |
| Elastizitätsmodul E | 5 MPa bis 10 GPa | 100 MPa | 1,25 MPa |
| Poissonzahl ν | 0,254 | 0,4 | 1/3 |
| Reibungskoeffizient μ | 0,25 | 1,2 | 1,2 |
| Dichte ρ | 2000 kg/m ³ | 2000 kg/m ³ | 2000 kg/m ³ |
| γ_t, γ_{sp} | 0,3 | 0,3 | 0,3 |
| A | 7 ns | 7 ns | 7 ns |

groß. Dieser Effekt resultiert daher, dass der granulare Robotergriffener durch das weiche Granulat eine große Normalkraft (bzw. einen großen Druck) auf das Objekt ausüben kann, wodurch auch große Reibungskräfte erzielt werden. Abbildung 12 beinhaltet nur Systeme mit $E_p \geq 5$ MPa, da niedrigere Elastizitätsmoduln aufgrund des großen Begrenzungsdrucks zu zu großen Deformationen der einzelnen Partikel führen und nicht mehr realistisch simuliert werden können. Für weichere Granulatpartikel ist zu erwarten, dass die Haltekraft wieder abnimmt: Ist der Griffener mit weichem Granulat gefüllt, wird er bei der Beaufschlagung des Unterdrucks stark komprimiert. Dies kann bei zu weichen Partikeln dazu führen, dass er wenig (oder) keine Berührungsfläche mit dem Objekt hat. Außerdem reduzieren sich die Normalkräfte auf das Objekt, da die Oberfläche des Griffeners abnimmt. Dadurch sinkt auch die maximale Reibungskraft.

4.3 Hohlkugelsimulation

Bei einem Kontakt mit Normalkraft F_n und Coulombschem Reibungskoeffizient μ ist die Tangentialkraft F_t durch das Coulombschen Reibungsgesetz

$$F_t \leq \mu F_n \quad (32)$$

beschränkt. Um eine hohe Reibungskraft zwischen dem granularen Griffener und einem Objekt zu erreichen, bedarf es also einer hohen Normalkraft.

Die Normalkraft zwischen Griffener und Objekt als Funktion des Partikelelastizitätsmoduls kann anhand eines Modells des Griffeners bestimmt werden:

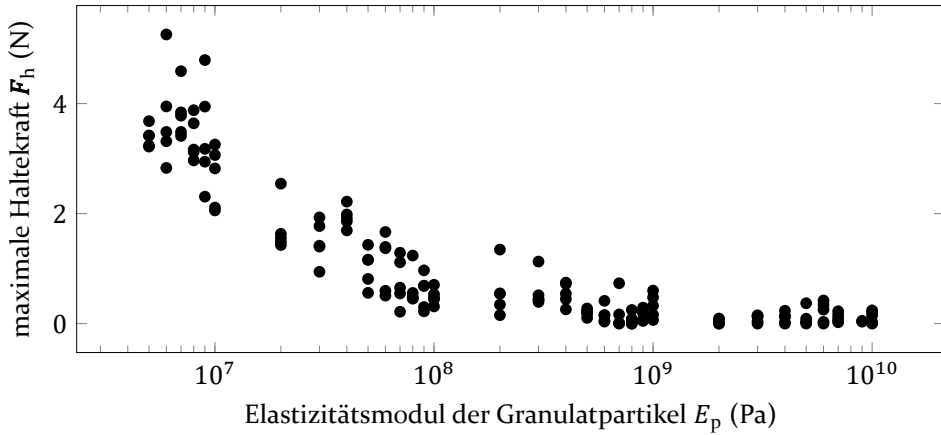


Abbildung 12: Die maximale Haltekraft des granularen Greifers als Funktion der Härte der Granulatpartikel

Dieser bildet, vereinfacht dargestellt, eine Halbkugel mit Radius R_{Greifer} , aus der mittig eine Halbkugel mit Radius R_{Objekt} ausgeschnitten und mit dem zu greifenden Objekt ersetzt wird. Vervollständigt man diese Halbkugel zu einer Kugel, so wird das Objekt durch einen mit Granulat gefüllten und durch Membranen begrenzten Kugelmantel mit Innenradius R_{Objekt} und Außenradius R_{Greifer} umschlossen. Abbildung 13a stellt dieses Modell dar. Ähnlich zum granularen Greifer kann der Kugelmantel mit einem Begrenzungsdruck

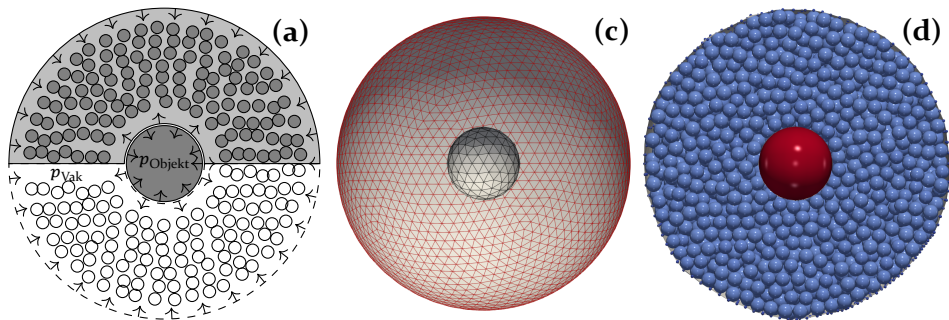


Abbildung 13: Das Hohlkuglexperiment. Vereinfacht gesehen bildet der Greifer eine Halbkugel ((a), obere Hälfte), die das zu greifende Objekt halb umschließt. Vervollständigt man diese Halbkugel zu einer Kugel, so resultiert das in einem mit Granulat gefüllten Kugelmantel, der das Objekt umschließt. Der Kugelmantel wird mit dem Begrenzungsdruck p_{Vak} beaufschlagt, und der resultierende Druck auf das Objekt p_{Objekt} wird gemessen. Abbildung (a) zeigt eine Skizze des Experiments. Abbildungen (b) und (c) sind Momentaufnahmen eines Schnitts durch die Simulation und zeigen die Membranen (b) und die Membranen mit Partikeln (c)

beaufschlagt werden, sodass er durch die innere und äußere Membran komprimiert wird. Da beide Membranen unterschiedlich groß sind, übersteigt die Kraft, die durch die äußere Membran auf den Kugelmantel wirkt, diejenige durch die innere Membran. In Summe drückt der Kugelmantel also, falls das Kugelmantelmaterial die Kräfte weitergibt, auf das umschlossene Objekt, an dem der darauf wirkende Druck p_{Objekt} gemessen werden kann.

Um dieses System zu simulieren, wird ein Objekt mit Radius R_{Objekt} im Ursprung platziert und von zwei sphärischen Membranen mit Radius R_{Objekt} und R_{Greifer} umgeben. Die Gitter für die Membranen werden wie bei den Simulationen des Greifers erstellt. Die innere Membran besteht aus 162, die äußere aus 2562 Partikeln (Abbildung 13b). Damit ist der Abstand zwischen zwei Membranpartikeln in beiden Membranen ca. 3 mm. Die Granulatpartikel werden zufällig zwischen beiden Membranen platziert. Dabei wird die äußere Membran auf einen Radius von $1,25 R_{\text{Greifer}}$ gedehnt. Anschließend kann das Hohlkugelsystem relaxieren, bevor der Begrenzungsdruck angelegt wird. Die Materialparameter sind identisch zu denen der Simulation des granularen Greifers (Tabelle 5). Die Simulation wird unter Bedingungen der Schwerelosigkeit durchgeführt. Abbildung 13c zeigt eine Momentaufnahme aus der Simulation.

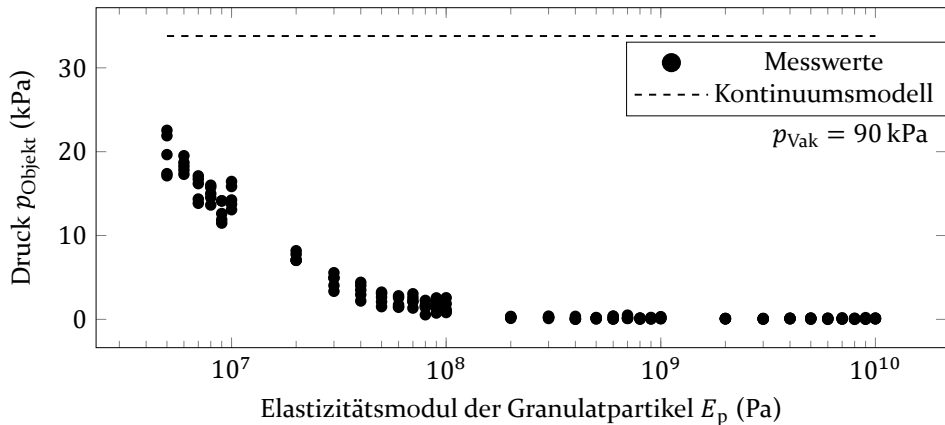


Abbildung 14: Der Druck p_{Objekt} auf das zu greifende Objekt als Funktion des Partikelelastizitätsmoduls E_p . Der beaufschlagte Begrenzungsdruck beträgt $p_{\text{Vak}} = 90 \text{ kPa}$. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf nach Gleichung (33) an

In Abbildung 14 ist der gemessene Druck p_{Objekt} auf das Objekt als Funktion des Elastizitätsmoduls der Granulatpartikel abgebildet. Wie schon beim granularen Greifer sind nur Elastizitätsmoduln $E_p \geq 5 \text{ MPa}$ dargestellt, da niedrigere E_p aufgrund des großen Begrenzungsdrucks zu zu großen Deformationen der einzelnen Partikel führen und nicht mehr realistisch simuliert

werden können. Wie erwartet steigt der Druck auf das Objekt an, wenn der Elastizitätsmodul der Granulatpartikel kleiner gewählt wird. Ein Granulat aus weicheren Partikeln kann also die Kräfte, die die Membranen auf das Granulat ausüben, besser übertragen.

4.4 Vergleich zur Kontinuumstheorie

Nimmt man an, dass der Kugelmantel nicht durch ein Granulat gefüllt ist und stattdessen aus einem Kontinuumsmaterial besteht, kann man das Holzkuglexperiment auch analytisch berechnen und man erhält [P3]

$$p_{\text{Objekt}} = p_{\text{Vak}} \frac{\left(2 - \left(\frac{R_{\text{Greifer}}}{R_{\text{Objekt}}}\right)^3\right)(2\nu - 1)}{2(1 - 2\nu) + \left(\frac{R_{\text{Greifer}}}{R_{\text{Objekt}}}\right)^3(1 + \nu)}. \quad (33)$$

In dieser Gleichung ist ν die Poissonzahl des Kontinuumsmaterials und der einzige Materialparameter, der Einfluss auf den Druck hat. Der Elastizitätsmodul des Mantelmaterials kommt nicht vor.

Die gestrichelte Linie in Abbildung 14 entspricht dem Wert, den man mit Gleichung (33) für die in der Simulation verwendeten Parameter erhält. Anders als die Messwerte ist der Wert in der gesamten Abbildung konstant. Es liegt daher nahe, dass die Eigenschaften eines mit Granulat gefüllten Kugelmantels (z. B. seine Poissonzahl) komplex von den Eigenschaften des Füllmaterials abhängen. Dies wird in Kapitel 5 anhand eines granularen Metamaterials genauer untersucht.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine Simulation des granularen Robotergreifers präsentiert, die eine direkte Simulation der flexiblen Membran beinhaltet. Diese wurde verwendet, um den Einfluss des Elastizitätsmoduls der Granulatpartikel auf die Haltekräfte des Greifers zu untersuchen. Dabei konnte gezeigt werden, dass mit Granulaten aus weichen Partikeln höhere Haltekräfte erzielt werden als mit Granulaten aus harten Partikeln. Die erhöhten Kräfte resultieren daraus, dass bei weichen Partikeln der Druck, den der Greifer auf das Objekt ausübt, erhöht ist, womit auch höhere Reibungskräfte möglich sind.

5 Granulares Metamaterial: Ein granularer Balken¹

5.1 Einleitung

Technische Anwendungen des Jamming-Übergangs reichen über den in Kapitel 4 behandelten granularen Robotergreifer hinaus von Endoskopen in der Medizintechnik [70, 71, 72, 73] bis hin zu Flügeln mit variabler Festigkeit für Anwendungen in der Luft- und Raumfahrt [74]. Insbesondere im Kontext der Robotik finden sich viele Anwendungen [6], z. B. Granulatpfoten [34], Schwarmroboter [75] oder weitere Formen von Granulatgreifern [76]. Anstatt auf eine konkrete Anwendung zu fokussieren, beschäftigt sich dieses Kapitel allgemeiner, anhand eines Metamaterials, mit den mechanischen Eigenschaften des granularen Jamming-Zustands. Dieser allgemeinere Ansatz erlaubt die Übertragung der gewonnenen Erkenntnisse auf mehrere konkrete Anwendungen.

Metamaterialien werden hergestellt, sodass sie Eigenschaften haben, die in herkömmlichen Materialien nicht vorhanden sind [77]. Ihre Eigenschaften resultieren nicht nur aus den Charakteristika ihrer Bestandteile, sondern auch aus ihren strukturellen Merkmalen. So sind die mechanischen Eigenschaften von Metamaterialien aus Granulat im Jamming-Zustand nicht nur auf die Beschaffenheit der Partikel auf der Mikroskala zurückzuführen (wie Elastizitätsmodul, Poissonzahl, Oberflächenreibung, Größenverteilung, usw.), sondern auch auf die strukturellen Merkmale des Metamaterials. Die Struktur eines Granulats im Jamming-Zustand wird wiederum durch das Kontakt Netzwerk und dessen Statistik definiert, siehe Abschnitt 1.2.

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften eines Balkens aus granularem Metamaterial durch Biegeversuche untersucht. Der Balken besteht aus einem Granulat, das von einer Membran umschlossen und durch Anlegen eines Begrenzungsdrucks in den Jamming-Zustand versetzt wird. Die Reaktion des Balkens auf die Biegung ist weitgehend durch den Widerstand des Granulats gegen Kompression bestimmt. Widerstand gegen auftretende Zugkräfte sind auf die Membran zurückzuführen, die das Granulat umschließt [78, 79, 80].

¹ Dieses Kapitel basiert auf den Publikationen [P4] und [P5], die der Autor dieser Dissertation als Hauptautor verfasst hat, und ist in großen Teilen eine Übersetzung dieser Publikationen. Abschnitt 5.2 gibt die Ergebnisse aus [P4] wieder. Abschnitt 5.3 präsentiert die Ergebnisse aus [P5].

Der Anteil der Partikel, die aufgrund der Biegung einem erhöhten Druck standhalten müssen, ist durch die Lage der neutralen Achse bestimmt, die vom Begrenzungsdruck und der Verformung des Balkens abhängt [74, 79]. Vergleicht man die Reaktion des granularen Balkens mit den Ergebnissen für Balken aus homogenen Materialien, z. B. einem Timoshenko- oder Euler-Bernoulli-Balken, können die Eigenschaften des granularen Metamaterials durch einen Elastizitätsmodul und eine Poissonzahl angegeben werden.

Der Inhalt dieses Kapitels ist in zwei Teile unterteilt. In Abschnitt 5.2 wird der Einfluss des Begrenzungsdrucks und der Elastizitätsmoduln von Granulat und Membran auf die elastischen Eigenschaften eines granularen Balkens untersucht und mit einem Potenzgesetz beschrieben. In Abschnitt 5.3 wird der Einfluss des Elastizitätsmoduls und der Reibungseigenschaften der Partikel auch über den elastischen Bereich hinaus analysiert. Dabei werden auch die interne Struktur des Balkens und die Verformungsmechanismen betrachtet.

5.2 Elastischer Biegeversuch

Im Allgemeinen ist die Reaktion eines granularen Balkens aufgrund der dissipativen Natur der Partikelinteraktionen viskoelastisch oder plastisch. Dieser Abschnitt beschränkt sich auf die viskoelastische Reaktion bei kleinen quasistatischen Verformungen. Dazu wird ein Balken mit quadratischem Querschnitt ($8\text{ cm} \times 8\text{ cm}$) und der Länge 40 cm betrachtet. Dieser ist auf zwei gelenkigen Festlagern fixiert (d. h. der Balken kann um die Auflagepunkte rotieren, sich jedoch nicht wegbewegen) und einer zentralen Last ausgesetzt, die eine Biegung hervorruft. Abbildung 15 skizziert diesen Aufbau.

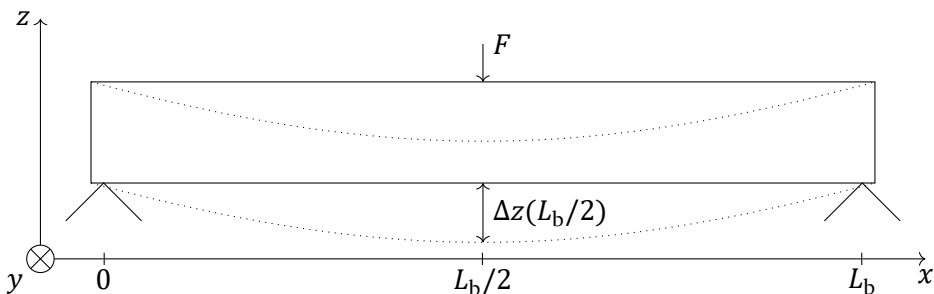


Abbildung 15: Skizze des Systems: Ein auf gelenkige Festlager gestützter Balken wird durch eine zentrale Last F verformt

Um die Biegung des Balkens zu simulieren, wird die Membran des Balkens mithilfe der in Kapitel 3 beschriebenen Methode mit 1792 Membranpartikeln und 3580 Dreiecken modelliert, wobei die Ecken der balkenförmigen Membran abgerundet sind. Im Balkeninneren werden kleine Granulatpartikel an zufälligen Positionen platziert, sodass sich die Partikel nicht berühren. Anschließend werden die Radien der Partikel mit dem Lubachevsky-Stillinger-Algorithmus [54] vergrößert. Schließlich wird schrittweise ein Differenzdruck zwischen dem Inneren des Balkens und der Umgebung p_{vak} auf die Membran aufgebracht. Durch den Druck, der im Folgenden *Begrenzungsdruck* genannt wird, wird das Granulat komprimiert, und das Volumen des Balkens schrumpft. Während des gesamten Initialisierungsprozesses befindet sich der Granulatbalken in einer quaderförmigen, massiven Form, um sicherzustellen, dass er seine Balkenform behält. Bei der Druckbeaufschlagung werden die Seitenwände der festen Form verschoben, sodass sie stets in Kontakt mit dem Granulatbalken sind. Nach Anwendung des Begrenzungsdrucks bekommt das System Zeit zur Relaxation, und die Form wird nicht mehr benötigt. Abbildung 16 zeigt das Ergebnis dieses Vorgehens.

Zu Beginn des Biegeversuchs werden einige Membranpartikel am Boden nahe den Balkenenden fixiert, um die gelenkigen Festlager zu modellieren. Diese Partikel befinden sich im gepunkteten Rechteck in Abbildung 17. Membranpartikel auf der Oberseite werden ausgewählt, um die Kraft F in gleichen Teilen auf sie aufzubringen. Das durchgezogene Rechteck in Abbildung 17 gibt die Position dieser Partikel an. Anhand der Membranpartikel im gestrichelten Rechteck in Abbildung 17 an der Unterseite des granularen Balkens wird die Durchbiegung des Balkens gemessen.

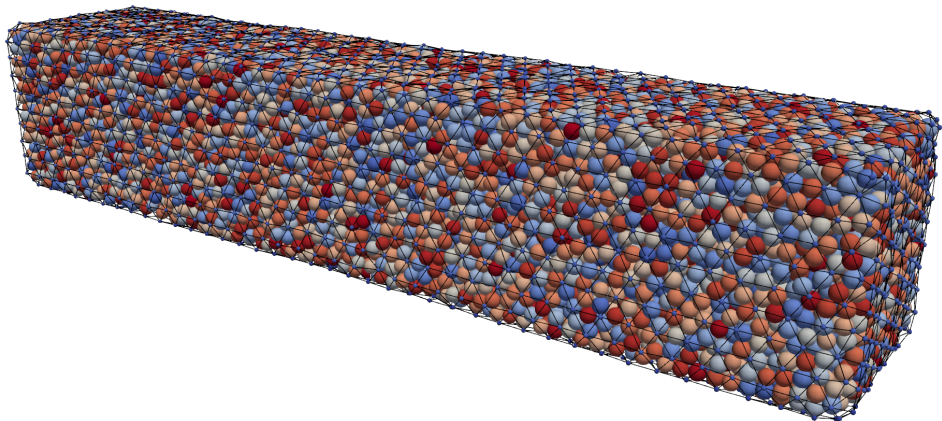


Abbildung 16: Der granulare Balken zum Start des Biegevorgangs

5 Granulares Metamaterial: Ein granularer Balken

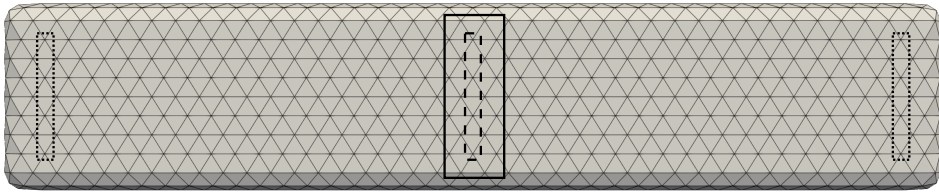


Abbildung 17: Membran des Balkens von oben bzw. unten. Die durchgezogenen und gepunkteten Rechtecke geben den Bereich an, in dem die äußeren Kräfte wirken. Das gestrichelte Rechteck zeigt den Bereich der Membranpartikel, die zur Messung der Deformation verwendet werden

Während des Biegeversuchs wird die angelegte Kraft F ausgehend von $F = 0$ schrittweise um 1 N erhöht, bis ein Maximum von $F = 10$ N erreicht ist. Anschließend wird die Kraft schrittweise bis zum Ausgangswert $F = 0$ verringert. Nach jedem Schritt erhält der Balken Zeit zur Relaxation, bevor die Verformung $\Delta z(F)$ aufgezeichnet wird.

Die in diesem Abschnitt verwendeten Materialeigenschaften der Membran und der Granulatpartikel sind in Tabelle 6 dargestellt. Die gesamte Simulation wird unter Bedingungen der Schwerelosigkeit ausgeführt.

Tabelle 6: Materialparameter der Biegebalkensimulation

| | Partikel | Membran |
|---------------------------|-------------------|------------------|
| Radius R / Dicke d | 2,5 mm bis 2,9 mm | 0,3 mm |
| Elastizitätsmodul E | 5 MPa bis 100 MPa | 10 MPa bis 1 GPa |
| Poissonzahl ν | 0,245 | 1/3 |
| Reibungskoeffizient μ | 0,25 | 1,2 |
| A | 4,3 ns | 4,3 ns |
| γ_t | 0,3 | 0,3 |
| γ_{sp} | | 0,15 |

5.2.1 Timoshenko-Balkentheorie

Um aus dem aufgezeichneten Kraft-Deformations-Verhalten des Balkens einen Elastizitätsmodul des Balkens E_b zu berechnen, kann auf die Timoshenko-Balkentheorie [81, 82] zurückgegriffen werden. Diese setzt für den vorliegenden Fall eines 3-Punkt-Biegebalkens der Länge L_b die Kraft F mit der Deformation Δz über die Gleichung

$$\Delta z \left(\frac{L_b}{2} \right) = \frac{FL_b^3}{48E_bI_b} + \frac{FL_b}{4\kappa G_b A_b} \quad (34)$$

in Verbindung. Hier sind A_b der Querschnitt, I_b das Flächenträgheitsmoment, und G_b der Schermodul des Balkens. Anhang A enthält die Herleitung dieses Ergebnisses.

Für den vorliegenden rechteckigen Querschnitt des Balkens ist der Timoshenko-Scherkoeffizient $\kappa = 5/6$ [83]. Nimmt man an, dass sich der Balken isotrop verhält, kann man mit

$$G_b = \frac{E_b}{2(1 + \nu_b)} \quad (35)$$

den Schermodul durch den Elastizitätsmodul E_b und die Poissonzahl ν_b des Balkens ersetzen. Durch diese Änderung erhält man

$$\Delta z \left(\frac{L_b}{2} \right) = \frac{FL_b^3}{48E_bI_b} + \frac{3FL_b(1 + \nu_b)}{5E_bA_b}. \quad (36)$$

Durch Anpassung von Gleichung (36) an die Messdaten kann somit der effektive Elastizitätsmodul

$$E_b^{\text{eff}} = \frac{E_b}{1 - \nu_b^2} \quad (37)$$

des Balkens berechnet werden.

5.2.2 Ergebnis des Biegeversuchs

Der Biegeversuch wird für verschiedene Elastizitätsmoduln der Membran und der Granulatpartikel sowie für verschiedene Werte des Begrenzungsdrucks durchgeführt, um die elastische Antwort des Granulatbalkens zu untersuchen. Abbildung 18 zeigt die Balkenverformung als Funktion der Last $\Delta z(F)$ für den Elastizitätsmodul $E_m = 100$ MPa der Membran und verschiedene

Werte des Partikelelastizitätsmoduls E_p und des Begrenzungsdrucks p_{Vak} . Der Elastizitätsmodul des Balkens nimmt mit zunehmendem Begrenzungsdruck zu. Bei einer gegebenen äußeren Belastung F nimmt die Deformation mit zunehmendem Begrenzungsdruck ab. Gleiches ist für den Elastizitätsmodul der Membran in Abbildung 19 zu beobachten: Je größer E_m wird, desto größer wird auch der Elastizitätsmodul des Balkens. Nur für den Begrenzungsdruck $p_{\text{Vak}} = 10 \text{ MPa}$ ist eine merkliche Hysterese festzustellen (Abbildung 18a). Dies zeigt an, dass der Bereich der linearen elastischen Verformung verlassen

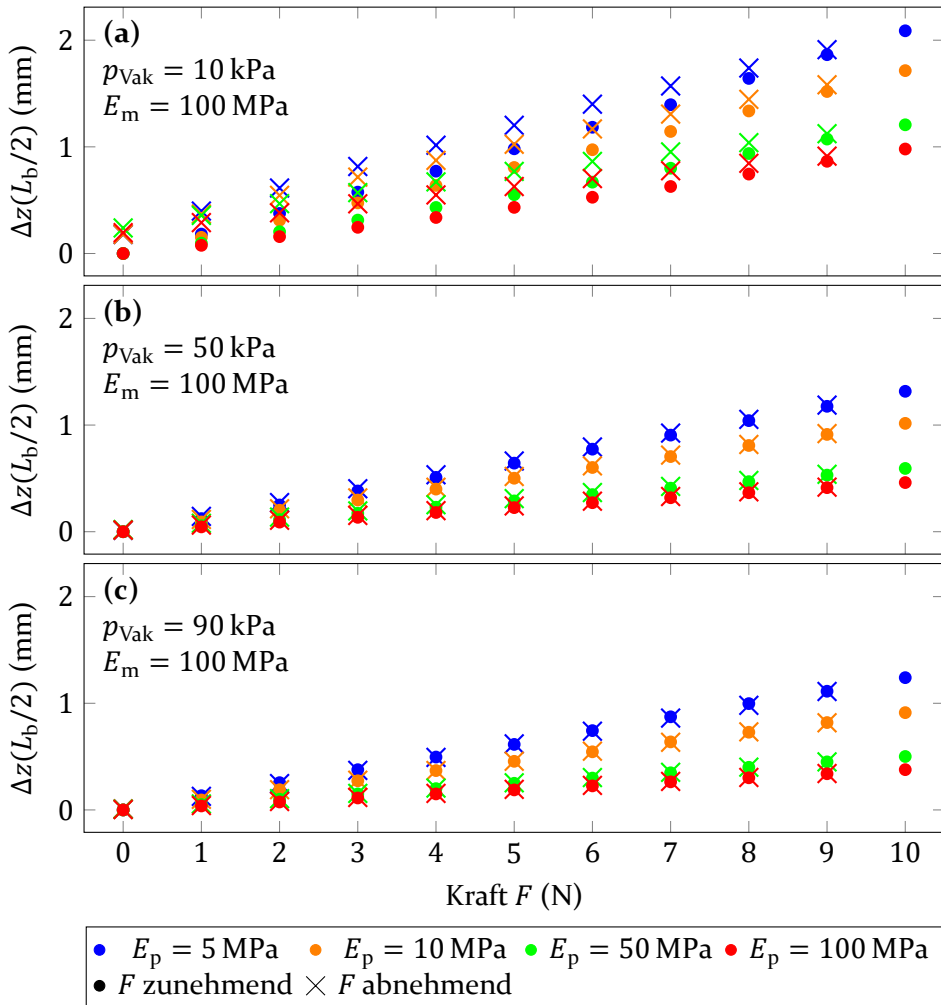


Abbildung 18: Die Deformation als Funktion der aufgebrachtten Kraft $\Delta z(F)$ für verschiedene Werte des Partikelelastizitätsmoduls und Begrenzungsdrucks p_{Vak} . Punkte zeigen die Funktion für zunehmende Belastung; Kreuze zeigen die Funktion für abnehmende Belastung

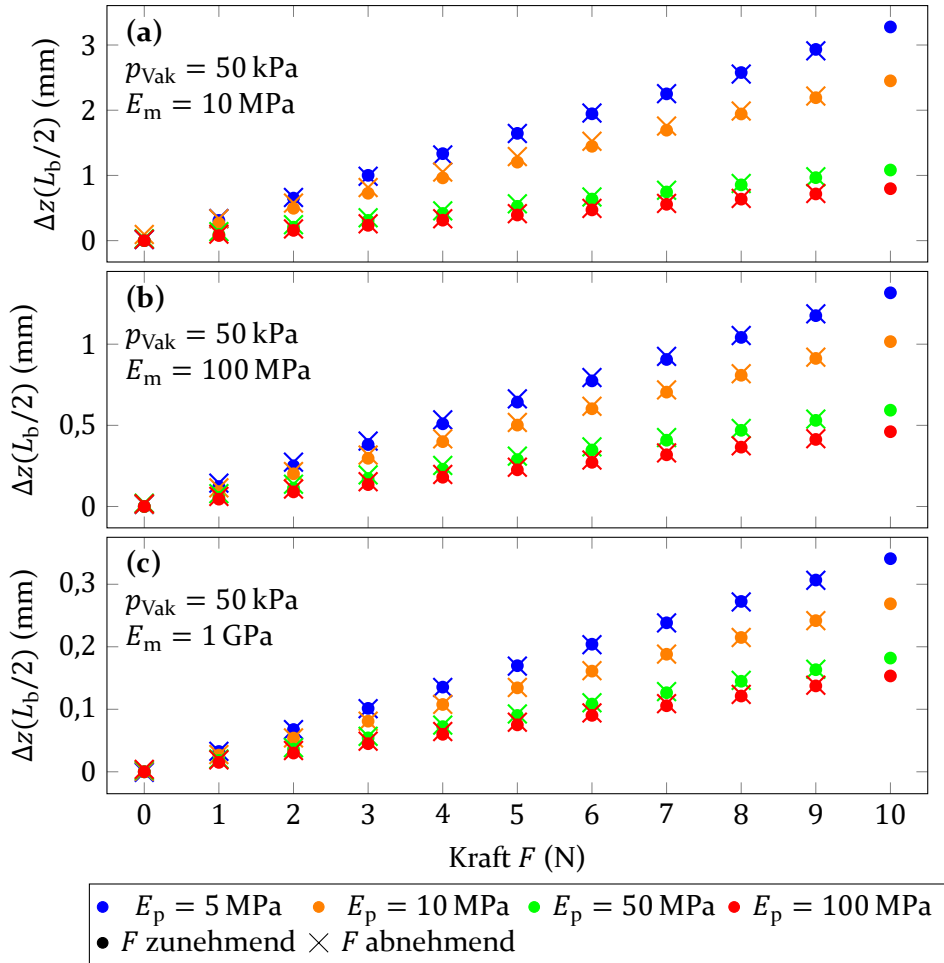


Abbildung 19: Die Deformation als Funktion der aufgebrachtten Kraft $\Delta z(F)$ für verschiedene Elastizitätsmoduln von Partikeln und Membran. Punkte zeigen die Funktion für zunehmende Belastung; Kreuze zeigen die Funktion für abnehmende Belastung

wurde und die Grenze der Gültigkeit für die in diesem Abschnitt vorgenommene Analyse überschritten ist. Für alle anderen Parameterkombinationen ist keine Hysterese erkennbar.

Die in Abbildungen 18 und 19 gezeigte annähernd lineare Abhängigkeit $\Delta z(F)$ ermöglicht es, den effektiven Elastizitätsmodul des Granulatbalkens E_b^{eff} durch Anpassung von Gleichung (36) an die Messdaten zu erhalten. Abbildung 20

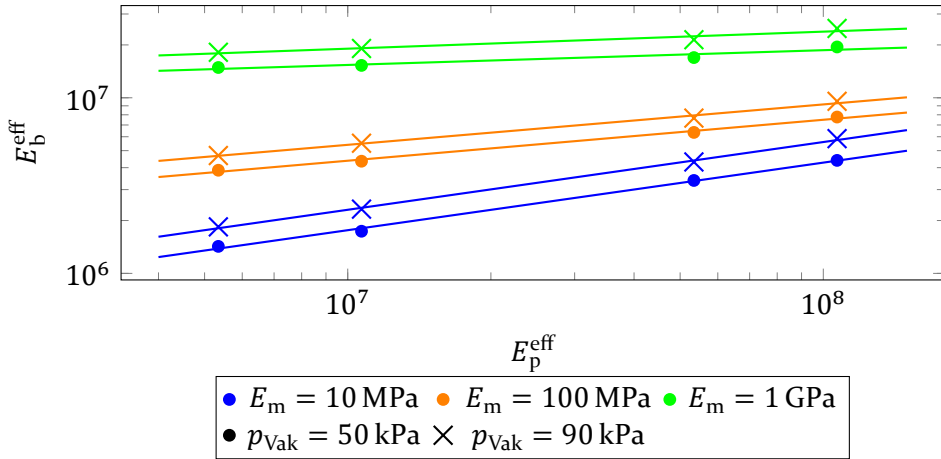


Abbildung 20: Der effektive Elastizitätsmodul des Granulatbalkens als Funktion des effektiven Partikel-elastizitätsmoduls $E_b^{\text{eff}} = f(E_p^{\text{eff}})$, für verschiedene Werte des Elastizitätsmoduls der Membran und des Begrenzungsdrucks. Die Linien zeigen an die Datenpunkte angepasste Funktionen in Form eines Potenzgesetzes

zeigt die Beziehung zwischen E_b^{eff} und dem effektiven Elastizitätsmodul der Granulatpartikel,

$$E_p^{\text{eff}} = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2}. \quad (38)$$

Die Daten für $p_{\text{vak}} = 10 \text{ kPa}$ sind wegen der auftretenden Hysterese hierbei nicht berücksichtigt.

Die in Abbildung 20 gezeigten Daten deuten auf ein Potenzgesetz zwischen den Elastizitätsmoduln hin. Tatsächlich fallen alle Datenpunkte einschließlich der Daten für die zusätzlichen Begrenzungsdrücke $p_{\text{vak}} = 30 \text{ kPa}$ und $p_{\text{vak}} = 70 \text{ kPa}$ auf eine Linie zusammen, wenn man die Beziehung

$$\frac{E_b^{\text{eff}}}{E_p^{\text{eff}}} = e^\alpha \left(\frac{E_m^{\text{eff}}}{E_p^{\text{eff}}} \right)^\beta \left(\frac{p_{\text{vak}}}{E_p^{\text{eff}}} \right)^\gamma \quad (39)$$

mit

$$E_m^{\text{eff}} \equiv \frac{E_m}{1 - \nu_m^2}, \quad (40)$$

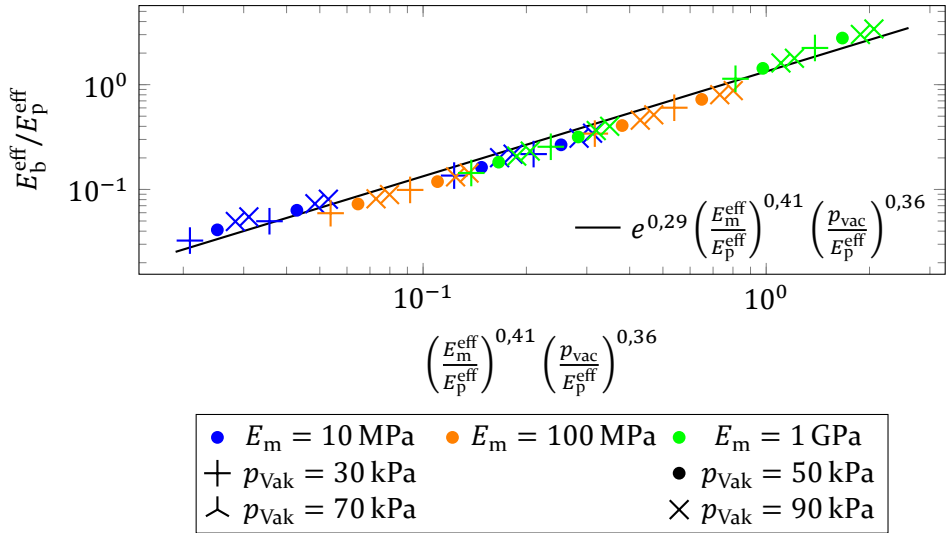


Abbildung 21: Die Beziehung des effektiven Elastizitätsmoduls E_b^{eff} des Granulatbalkens zu den untersuchten Parametern

und

$$\alpha = 0,29; \quad \beta = 0,41; \quad \gamma = 0,36 \tag{41}$$

betrachtet. Abbildung 21 zeigt diesen Zusammenhang.

5.3 Strukturelle Eigenschaften

In diesem Abschnitt wird ein Granulatbalken mit rechteckigem Querschnitt ($4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$) und der Länge $L_b = 40 \text{ cm}$ betrachtet (Abb. 22). Um die struk-

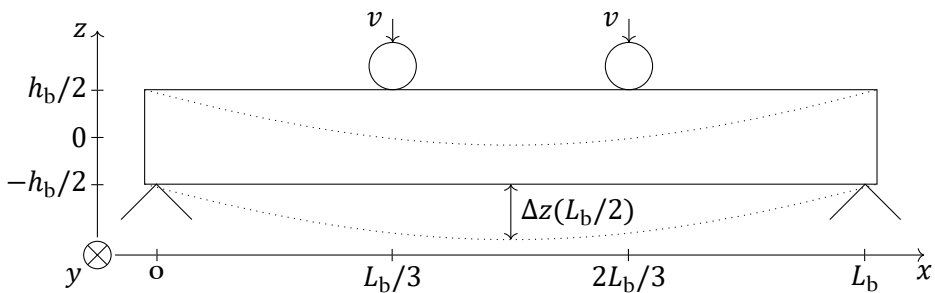


Abbildung 22: Skizze des untersuchten Systems: ein einfach gestützter Balken, der einer Vier-Punkt-Biegung ausgesetzt ist

turellen Eigenschaften zu untersuchen, wird er in numerischen Simulationen einem 4-Punkt-Biegeversuch unterworfen. Der 4-Punkt-Biegeversuch hat gegenüber dem 3-Punkt-Biegeversuch den Vorteil, dass die Scherspannungen zwischen den Belastungspunkten konstant ist. Gemäß Industriestandards [84, 85], wird die Biegung des Balkens in diesem Abschnitt durch zwei Stäbe oberhalb des Balkens an den Positionen $L_b/3$ und $2L_b/3$ hervorgerufen. Dazu bewegen sich diese mit konstanter Geschwindigkeit 0,2 mm/s nach unten.

In diesem Abschnitt wird der Reibungskoeffizient zwischen den Partikeln verwendet, um Granulatpackungen mit unterschiedlichen Packungseigenschaften zu erzeugen. Dazu wird das Vorbereitungsprotokoll aus Abschnitt 5.2 modifiziert und umfasst nun die folgenden Schritte:

1. Reibungsfreie Partikel ($\mu = 0$) mit Radius $R \in [1,66; 1,84]$ mm werden zufällig im von der Membran geformten Balken platziert, sodass sie nicht miteinander in Kontakt kommen.
2. Um eine Packung mit einem bestimmten Feststoffanteil ϕ_{init} zu erzeugen, wird der Lubachevsky-Stillinger-Algorithmus [54] verwendet: Die Radien der Partikel nehmen allmählich zu, während das Innenvolumen der Membran konstant bleibt, bis ein gewünschter Feststoffanteil ϕ_{init} erreicht ist. Man beachte, dass der Feststoffanteil ϕ_{init} derjenige ist, der vor der Anwendung des Begrenzungsdrucks erreicht wird. Der Balken befindet sich in einer quaderförmigen festen Form, um sicherzustellen, dass er seine Form behält.
3. Der Balken wird schrittweise mit einem Begrenzungsdruck p_{Vak} beaufschlagt und schrumpft im Volumen. Dabei wird die Quaderform des Granulatbalkens erhalten, indem die Seiten der Form so verschoben werden, dass die Membran in Kontakt mit der Form bleibt. Für diesen Schritt wird der Reibungskoeffizient $\mu = \mu_{\text{init}}$ verwendet. Dieser bestimmt den Feststoffanteil der Granulatpartikel ϕ_{bend} am Ende dieses Schrittes bzw. zu Beginn des Biegeversuchs.

Nach der Initialisierung wird der Reibungskoeffizient der Partikel auf $\mu = \mu_p$ gesetzt und der Biegeversuch gestartet. Abbildung 23 veranschaulicht das Simulationsprotokoll. Die in diesem Abschnitt verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 7 angegeben.

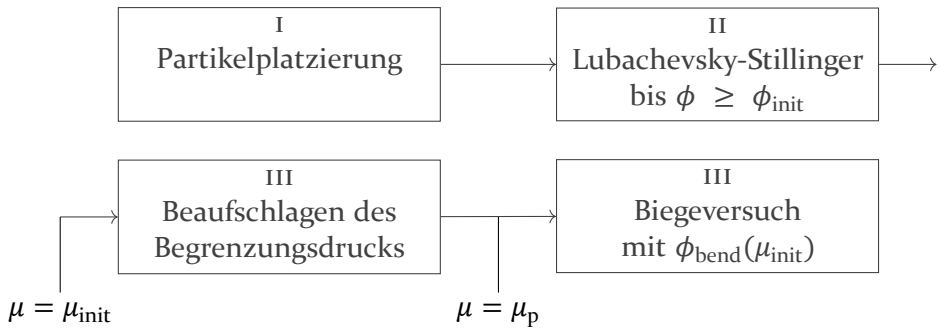


Abbildung 23: Simulationsprotokoll. Zur Beschreibung siehe Text

Tabelle 7: Materialparameter der Biegebalkensimulation

| | Partikel | Membran |
|---------------------------|------------------------|------------------------|
| Dichte ρ | 2000 kg/m ³ | 2000 kg/m ³ |
| Elastizitätsmodul E | 5 MPa bis 100 MPa | 10 MPa |
| Poissonzahl ν | 0,245 | 1/3 |
| Reibungskoeffizient μ | 0 bis 1,2 | 1,2 |
| A | 7 ns | 7 ns |
| γ_t | 0,3 | 0,3 |
| γ_{sp} | | 0,15 |

5.3.1 Packungseigenschaften

Ein wichtiges Merkmal eines Granulats im Jamming-Zustand ist die Kontaktzahl z , die durchschnittliche Zahl der Kontakte pro Partikel. Da das Präparationsprotokoll die Eigenschaften der Packung bestimmt, hängt die Kontaktzahl von den Parametern dieses Protokolls ab. Diese sind der Feststoffanteil ϕ_{init} vor der Anwendung des Begrenzungsdrucks, der Reibungskoeffizient μ_{init} während der Anwendung des Drucks, und der Begrenzungsdruck p_{vak} . Abbildung 24 zeigt den Einfluss dieser Parameter auf die Kontaktzahl.

In beiden Abbildungen ist eine Abnahme der Kontaktzahl mit steigenden Reibungskoeffizienten zu erkennen. Ein ähnliches Verhalten ist aus der Theorie der harten Kugeln bekannt. Hier geht die Kontaktzahl gegen $z = 2D$ für reibungsfreie Partikel und gegen $z = D + 1$ für $\mu \rightarrow \infty$, wobei D die Anzahl der Raumdimensionen ist. Für endliche Reibungskoeffizienten μ liegt z zwischen

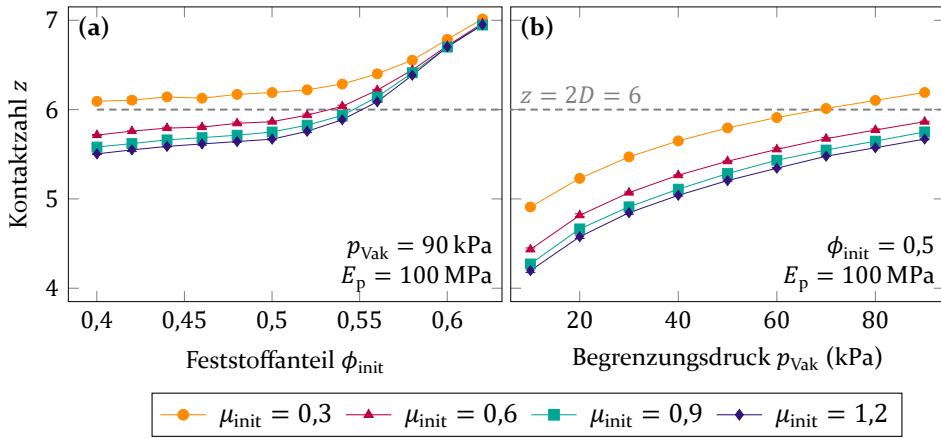


Abbildung 24: Die Kontaktzahl z der erzeugten Packung. Als Funktion des anfänglichen Feststoffanteils ϕ_{init} , für den Begrenzungsdruck $p_{\text{vak}} = 90 \text{ kPa}$ und verschiedene Werte des anfänglichen Reibungskoeffizienten μ_{init} (a). Als Funktion des Begrenzungsdrucks $z(p_{\text{vak}})$ (b), mit festen Parametern $\phi_{\text{init}} = 0,5$ und μ_{init} (b)

diesen Grenzen, die durch eine Zwangsfunktion beschrieben werden können [86].

Die Regelmäßigkeit der erzeugten Packung kann durch die radiale Verteilungsfunktion

$$g(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i(r)}{4\pi(r/R_{\text{mittel}})^2} \quad (42)$$

charakterisiert werden. Die Zahl $n_i(r)$ ist die Anzahl der Partikel, die sich mit der Oberfläche einer Kugel überschneiden, die Zentrum des Partikels i ist und einen Radius r hat. Die Summe geht über alle N Partikel im Balken. Der Radius R_{mittel} ist der durchschnittliche Radius aller Partikel im Granulat. Abbildung 25 zeigt $g(r)$ für den Begrenzungsdruck $p_{\text{vak}} = 90 \text{ kPa}$ und einen variablen anfänglichen Feststoffanteil ϕ_{init} (Abbildung 25a), sowie für den anfänglichen Feststoffanteil $\phi_{\text{init}} = 0,5$ und verschiedene Werte des Begrenzungsdrucks (Abbildung 25b). In allen untersuchten Fällen gibt es keine Anzeichen von Kristallisation, die man anhand von schmalen Maxima in der radialen Verteilungsfunktion erkennen könnte. Stattdessen zeigt die Verteilungsfunktion mit zunehmendem Abstand verschwindende Spitzen, sodass die Packung in allen gezeigten Fällen amorph ist [87].

Für die folgenden Analysen wird der anfängliche Feststoffanteil $\phi_{\text{init}} = 0,5$ gewählt, um zu vermeiden, dass das Granulat schon vor dem Anlegen des

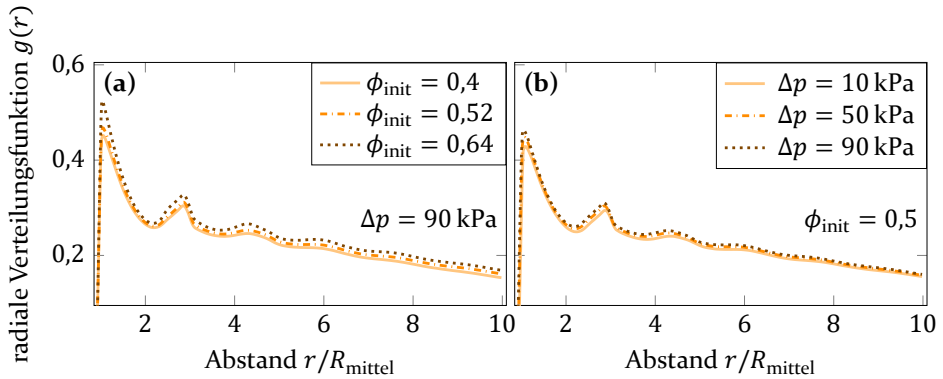


Abbildung 25: Radiale Verteilungsfunktion für (a) festen Begrenzungsdruck $p_{\text{vak}} = 90 \text{ kPa}$ und verschiedene Werte des anfänglichen Feststoffanteils ϕ_{init} und (b) festen anfänglichen Feststoffanteil $\phi_{\text{init}} = 0,5$ für verschiedene Werte des Begrenzungsdrucks. Materialparameter der Partikel: $E_p = 100 \text{ MPa}$ und $\mu_p = 0,3$

Begrenzungsdrucks im Jamming-Zustand befindet. Der Begrenzungsdruck wird auf $p_{\text{vak}} = 90 \text{ kPa}$ festgelegt, da in Abschnitt 5.2 und früheren Studien [74] gezeigt wurde, dass granulare Balken bei hohem Begrenzungsdruck stabiler sind, und der gewählte Wert auch für Experimente realistisch ist.

5.3.2 Elastizitätsmodul und Bruchfestigkeit

Die Deformation des Balkens Δz wird an der Position $L_b/2$ gemessen. Zusätzlich wird die Widerstandskraft F des Balkens gegen die Bewegung aufgezeichnet. Die Euler-Bernoulli-Balkentheorie [88] liefert die Gleichungen

$$\sigma = \frac{FL_b}{h_b^2 t_b} \quad (43)$$

$$\epsilon = \Delta z \frac{108 h_b}{23 L_b^2} \quad (44)$$

zur Umrechnung der Messwerte in Spannung σ und Dehnung ϵ . Hier definieren die Länge (und Stützweite) L_b , die Höhe h_b und die Tiefe t_b die Geometrie des Balkens (Abbildung 22). Die Einzelheiten der Herleitung sind im Anhang B angegeben. Die Euler-Bernoulli-Balkentheorie vernachlässigt im Gegensatz zur Timoshenko-Balkentheorie die Schubverformung des Balkens und wird in diesem Abschnitt aufgrund ihrer Einfachheit vorgezogen.

Eine typische Spannungs-Dehnungs-Kurve ist in Abbildung 26 dargestellt. Sie zeigt drei Phasen: Einen anfänglichen steilen Anstieg, gefolgt von einem

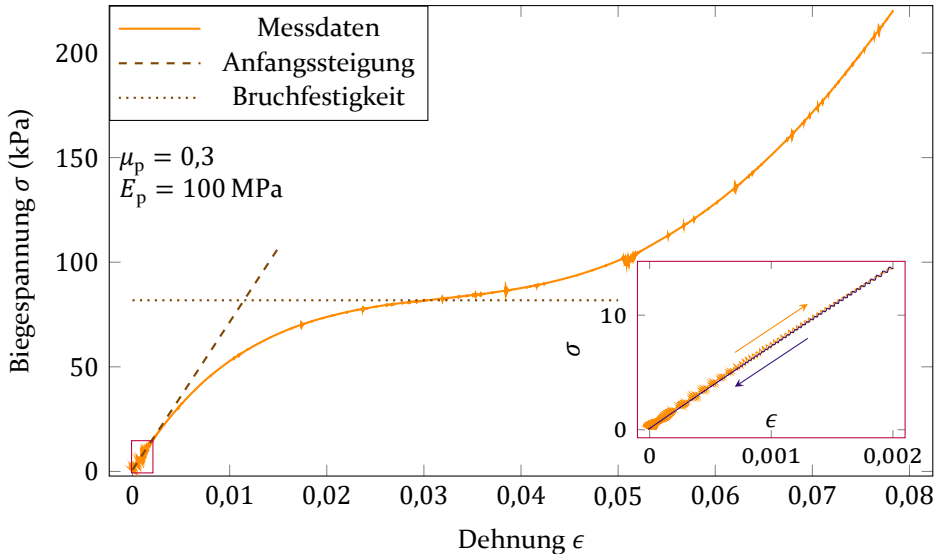


Abbildung 26: Beispielhafte Spannungs-Dehnungs-Kurve. Dargestellt sind der Elastizitätsmodul (Anfangssteigung der Kurve, gestrichelte Linie) und die Bruchfestigkeit (gepunktete Linie). Die Unterabbildung zeigt den Be- und Entlastungsverlauf einer Simulation mit $\epsilon \leq 0,002$

Plateau oder Wendepunkt, und schließlich einen zweiten steilen Anstieg. Für den anfänglichen Anstieg im Grenzfall kleiner Dehnungen ist der Verlauf linear und kann mit

$$\sigma = E_b \epsilon \quad (45)$$

beschrieben werden. Hier ist die Proportionalitätskonstante E_b der Elastizitätsmodul des Balkens. Dieser wird für $\epsilon \leq 0,002$ durch Anpassung von Gleichung (45) an die gemessene Spannungs-Dehnungs-Kurve bestimmt. Man beachte, dass der Begriff „Elastizitätsmodul“ verwendet wird, obwohl der Be- und Entlastungsverlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve für Dehnungen $\epsilon \leq 0,002$ nicht identisch sind. Diese Eigenschaft wird von vielen gewöhnlichen Materialien geteilt, die auch bei kleinen Verformungen eine gewisse strukturelle Plastizität aufweisen, die für nicht vollständig wiederhergestellte Eigenschaften und Alterung verantwortlich ist. Dennoch ist der Unterschied zwischen Be- und Entlastung für den hier betrachteten Fall niedrig. Dies kann im Unterbild von Abbildung 26 gesehen werden.

Das Plateau oder der Wendepunkt gibt die Bruchfestigkeit Y_b des Balkens an, d. h. die maximale Spannung σ , die das Granulat im Jamming-Zustand

aushalten kann. Zur Berechnung von Y_b wird der gemessene Spannungs-Dehnungs-Verlauf mit einem Gauß-Filter geglättet und numerisch abgeleitet. Die Ableitung wird erneut gefiltert und abgeleitet. Die Bruchfestigkeit ist der Spannungswert, bei dem die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt (von negativ zu positiv).

Im zweiten und letzten Bereich des Anstiegs bestimmt die Membran den Widerstand des Balkens. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve gibt dann keinen Aufschluss mehr über das Verhalten des Granulats im Inneren des Balkens. Um sicherzustellen, dass dieser Bereich erreicht wird, werden alle Simulationen erst bei einer Dehnung von $\epsilon \approx 0,08$ gestoppt.

5.3.3 Einfluss von Partikelreibung und Packungseigenschaften

Um die Beziehung zwischen den Partikeleigenschaften und den Eigenschaften des Granulatbalkens im Jamming-Zustand zu bestimmen, werden in diesem Unterabschnitt der Elastizitätsmodul $E_p \in [5; 100]$ MPa und der Reibungskoeffizient $\mu_p \in [0; 1,2]$ der Granulatpartikel variiert.

Zunächst wird die intuitive Wahl $\mu_{\text{init}} = \mu_p$ getroffen, sodass der Feststoffanteil ϕ_{bend} zu Beginn des Biegeversuchs (d. h. der Feststoffanteil *nach* der Anwendung des Begrenzungsdrucks) eine Funktion des Reibungskoeffizienten der Partikel während der Biegung ist: $\phi_{\text{bend}} = \phi_{\text{bend}}(\mu_{\text{init}}) = \phi_{\text{bend}}(\mu_p)$. Die Wahl $\mu_{\text{init}} = \mu_p$ wird im Folgenden als Protokoll A bezeichnet. Abbildung 27 zeigt den Elastizitätsmodul E_b (Abbildung 27a) und die Bruchfestigkeit Y_b (Abbildung 27b) des Balkens für die betrachteten Parameter.

Wie erwartet führen härtere Granulatpartikel zu einem höheren Elastizitätsmodul des Balkens (Abbildungen 27a und 29a). Dies stimmt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 5.2 überein, wo der Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul des Balkens und dem Elastizitätsmodul der Partikel durch ein Potenzgesetz beschrieben wurde.

Naiverweise könnte man erwarten, dass ein hoher Partikelreibungskoeffizient einen hohen Elastizitätsmodul des Balkens zur Folge hat, da Partikel-Kontakte mit hoher Reibung einer hohen Belastung standhalten können. Überraschenderweise führt ein hoher Reibungskoeffizient jedoch zu einem niedrigen Elastizitätsmodul des Balkens. Dies könnte eine Folge der geringeren Kontaktzahl des Granulats im Jamming-Zustand für hohe μ_p sein: Wenn der Begrenzungsdruck auf ein Granulat mit hoher Reibung angewendet wird, wird eine geringe Packungsdichte erreicht. Daher ist die Gesamtzahl der Kontakte innerhalb des Granulats gering. Somit ist jeder einzelne Kontakt einer hohen Belastung

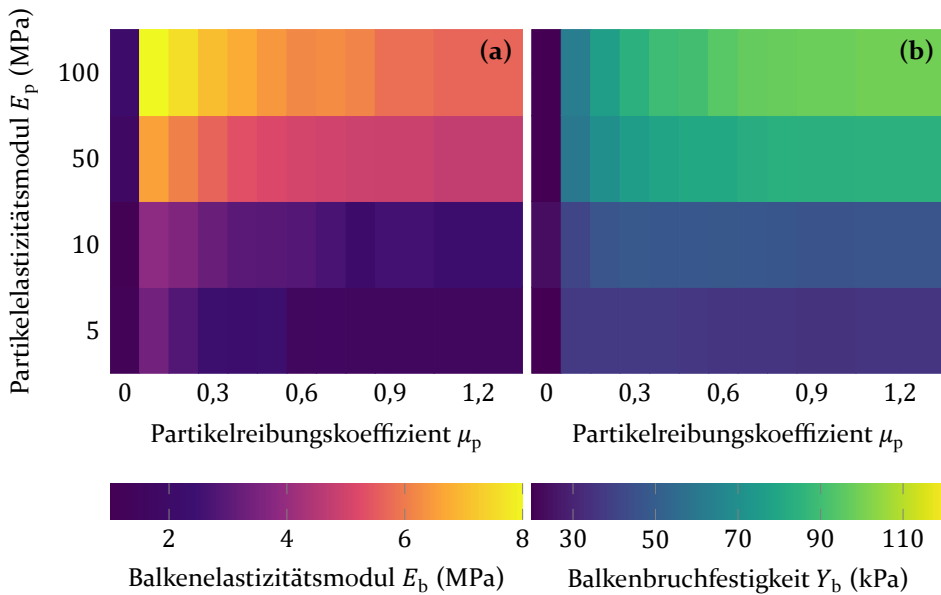


Abbildung 27: Die Eigenschaften des Balkens in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Granulartpartikel. Der Elastizitätsmodul E_b (a) und die Bruchfestigkeit Y_b (b) des Balkens sind mit Protokoll A bestimmt: Der Feststoffanteil ϕ_{bend} hängt vom Reibungskoeffizienten der Partikel während der Biegung ab

ausgesetzt ist, was wiederum zu einem geringen Elastizitätsmodul des Balkens führt.

Die Wahl $\mu_p = 0$ stellt einen Sonderfall dar, in dem die Partikel ungehindert gegeneinander gleiten und sich damit leicht reorganisieren können. Der geringe Elastizitätsmodul des Balkens für $\mu_p = 0$ zeigt, dass Reibung für die Stabilität des Granulats notwendig ist, um einen signifikanten mechanischen Widerstand gegen äußere Belastung zu entwickeln.

Die Bruchfestigkeit Y_b des Balkens zeigt zwei Effekte: Für harte Partikel ($E_p = 50$ MPa und $E_p = 100$ MPa) führen hohe μ_p zu hohen Y_b , da große Kräfte notwendig sind, um die Coulomb-Grenze der Kontakte zwischen den Partikeln zu erreichen, sodass die Partikel gegeneinander gleiten können. Bei niedrigem Partikelelastizitätsmodul ($E_p = 5$ MPa und $E_p = 10$ MPa) trifft dies nur für $\mu_p < 0,3$ zu. Für große $\mu_p > 0,3$ lässt eine weitere Erhöhung von μ_p die Bruchfestigkeit des Balkens unverändert. Dies zeigt, dass zwei Effekte miteinander konkurrieren: Ein hoher Reibungskoeffizient μ_p erhöht die Kraft, die ein einzelner Kontakt übertragen kann, verringert aber auch die Kontaktzahl des Granulats, da der Jamming-Übergang bei einem geringen

Feststoffanteil auftritt. Bei hohen Reibungskoeffizienten kann die erhöhte Maximallast pro Kontakt die verringerte Kontaktzahl nicht ausgleichen.

Im Allgemeinen unterscheidet sich die Bruchfestigkeit bei geringen Werten des Elastizitätsmoduls der Partikel weniger für die verschiedenen Reibungskoeffizienten als bei hohen Werten, da die höhere Verformung und der höhere Feststoffanteil der weichen Partikel die Relativbewegung zwischen benachbarten Partikeln behindert.

Um einen Einfluss des Feststoffanteils und der Kontaktzahl auszuschließen, wird der Biegeversuch nun bei festem $\mu_{\text{init}} = 0,3$ für variierende μ_p durchgeführt. Dieses Vorgehen wird als Protokoll B bezeichnet. Dabei ist der Feststoffanteil $\phi_{\text{bend}} \equiv \phi_{\text{bend}}(\mu_{\text{init}})$ zu Beginn des Biegeversuchs konstant und unabhängig vom Reibungskoeffizienten der Partikel während der Biegung μ_p . Werte von $\mu_p < \mu_{\text{init}}$ werden für das Protokoll B ausgeschlossen, da geringere Reibungskoeffizienten eine weitere Kompression des Balkens ermöglichen, und somit ϕ_{bend} nicht mehr unabhängig von μ_p wäre. Abbildung 28 zeigt die mit Protokoll B ermittelten Balkeneigenschaften.

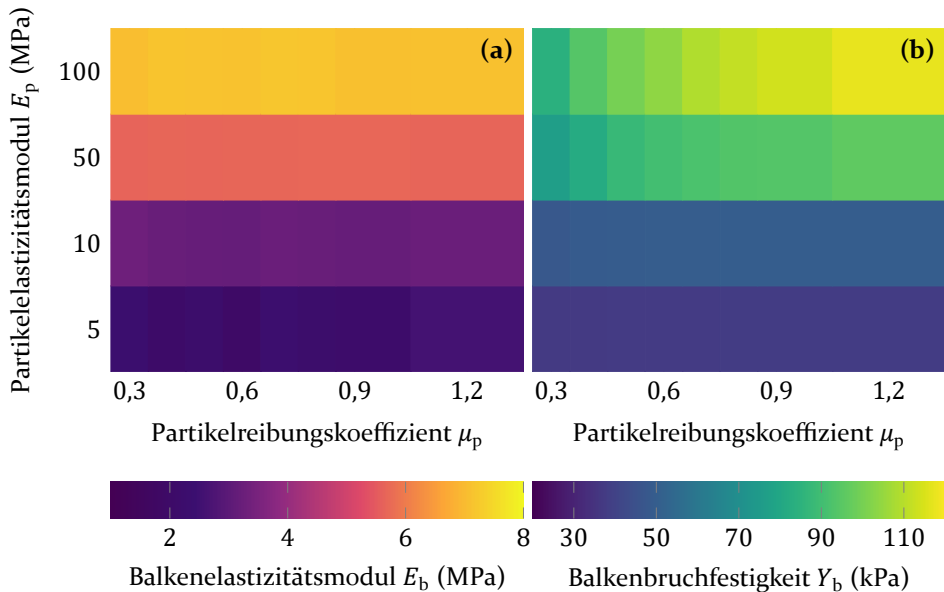


Abbildung 28: Die Eigenschaften des Balkens in Abhängigkeit von den mikroskopischen Eigenschaften der Granulatpartikel. Der Elastizitätsmodul E_b (a) und die Bruchfestigkeit Y_b (b) des Balkens sind mit Protokoll B bestimmt: Der Feststoffanteil ϕ_{bend} ist unabhängig vom Partikelreibungskoeffizient μ_p

Der Elastizitätsmodul E_b des Balkens ist für jeden Wert E_p konstant und unabhängig vom Partikelreibungskoeffizienten μ_p . Wie angenommen, ist der mit Protokoll A beobachtete Effekt, bei dem eine hohe Reibung zu einem geringen Elastizitätsmodul des Balkens führt, das Ergebnis der unterschiedlichen Kontaktzahlen, die bei verschiedenen Reibungskoeffizienten erreicht werden: Mehr Kontakte leisten größeren Widerstand bei gleicher Verformung. Mit anderen Worten: Der Elastizitätsmodul des Granulats im Jamming-Zustand wird durch den Feststoffanteil bzw. die Kontaktzahl definiert, da jeder Kontakt nur eine endliche Last tragen kann. Die Reibung zwischen den Partikeln hat keinen Einfluss.

Im Gegensatz zum Elastizitätsmodul steigt die Bruchfestigkeit Y_b des Balkens mit zunehmendem μ_p an (Abbildung 28b). Die hohe Bruchfestigkeit für hohe μ_p resultiert aus den hohen Reibungskräften, die überwunden werden müssen, damit der Balken nachgibt. Mit Protokoll B haben alle Balken den gleichen Feststoffanteil ϕ_{bend} zu Beginn des Biegeexperiments, daher wird das Granulat nicht durch eine niedrige Kontaktzahl bei hohen μ_p geschwächt. Abbildung 29 zeigt den direkten Vergleich zwischen den Protokollen A und B. Für den Fall $\mu_p = 0,3$, für den ϕ_{bend} in beiden Protokollen ähnlich ist, werden identische Balkeneigenschaften beobachtet. Für $\mu_p > 0,3$ sind sowohl der Elastizitätsmodul E_b als auch die Bruchfestigkeit Y_b des Balkens für Protokoll B höher als für Protokoll A (Abbildung 29), weil das Protokoll B zu höheren Feststoffanteilen ϕ_{bend} führt.

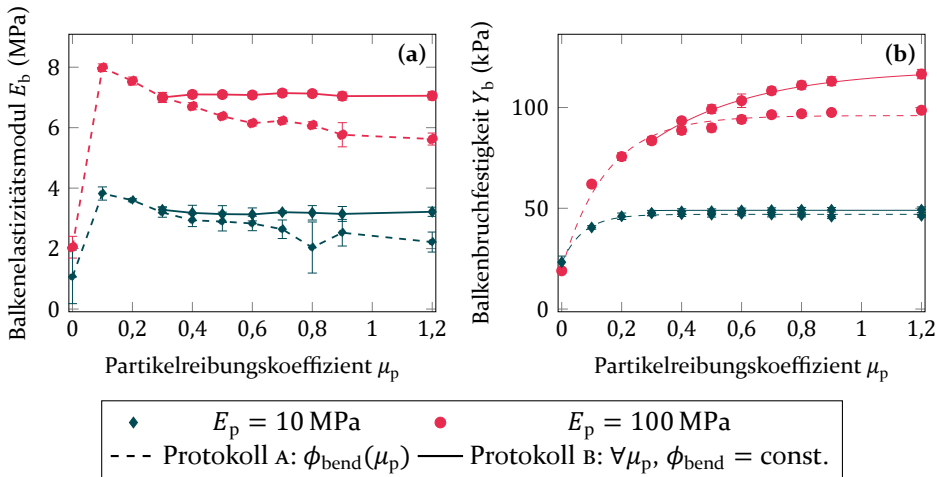


Abbildung 29: Die mechanischen Eigenschaften des Balkens als Funktion des Partikelreibungskoeffizienten μ_p . (a) Der Elastizitätsmodul des Balkens E_b . Punkte sind mit Linien verbunden. (b) Die Bruchfestigkeit des Balkens Y_b . Die Linien zeigen eine exponentielle Anpassung

Abbildung 29b deutet darauf hin, dass der Balken selbst im Grenzfall $\mu_p \rightarrow \infty$ eine endliche Bruchfestigkeit Y_b hat. Um dieses Verhalten anzunähern, wird eine Exponentialfunktion der Form

$$Y_b(\mu_p) = (Y_b^0 - Y_b^\infty) e^{-a\mu_p} + Y_b^\infty \quad (46)$$

an die Messdaten angepasst. Dabei sind $Y_b^0 \equiv Y_b(\mu_p = 0)$ und $Y_b^\infty \equiv Y_b(\mu_p \rightarrow \infty)$ die Bruchfestigkeit des Balkens in den Grenzfällen ohne Reibung und bei unendlich großem Reibungskoeffizienten, und a ist eine weitere Konstante. Die Linien in Abbildung 29b zeigen die angepassten Funktionen. Tabelle 8 gibt die optimalen Parameter an.

Tabelle 8: Optimale Parameter für Gleichung (46)

| E_p (MPa) | Protokoll | Y_b^0 (kPa) | Y_b^∞ (kPa) | a |
|-------------|-----------|---------------|--------------------|--------|
| 5 | A | 18,31 | 35,78 | 251,52 |
| | B | 36,01 | 37,64 | 2,53 |
| 10 | A | 23,17 | 46,92 | 13,92 |
| | B | 40,63 | 49,31 | 5,31 |
| 50 | A | 18,89 | 81,58 | 9,27 |
| | B | 29,14 | 95,63 | 3,98 |
| 100 | A | 20,63 | 96,15 | 6,67 |
| | B | 35,65 | 119,41 | 2,85 |

5.3.4 Analyse des Kraftnetzwerks

Die Fähigkeit des Balkens, externen Biegespannungen zu widerstehen, resultiert aus dem zwischen den Partikeln gebildeten Kraftnetzwerk. Eine Analyse des Kraftnetzwerks während des Biegevorgangs kann daher zum Verständnis der mesoskopischen Bedeutung der Bruchfestigkeit beitragen.

Abbildung 30a zeigt die Durchschnittskraft $\langle F \rangle$ pro Kontakt zwischen den Granulatpartikeln in Abhängigkeit von der Biegespannung σ . Die Daten werden für Protokoll B angezeigt, um die Wirkung unterschiedlicher Reibungskoeffizienten von den Auswirkungen des Feststoffanteils zu isolieren. Bei der durchschnittlichen Kontaktkraft lassen sich zwei Bereiche unterscheiden: Für eine äußere Biegespannung, die niedriger ist als die Bruchfestigkeit des Balkens $\sigma < Y_b$ steigt die durchschnittliche Kraft mit zunehmender Spannung.

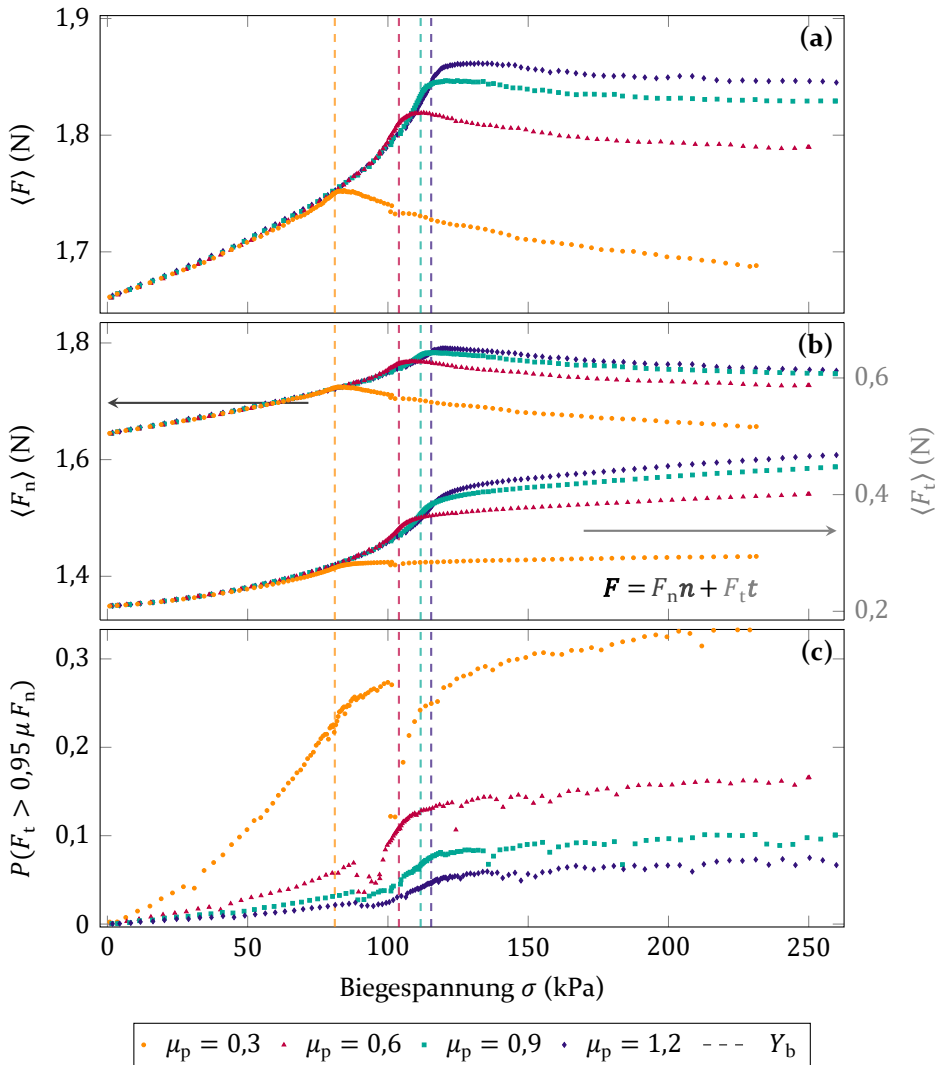


Abbildung 30: Durchschnittskraft $\langle F \rangle$ pro Kontakt zwischen den Granulatpartikeln als Funktion der Biegespannung σ . Die durchschnittliche Kraft pro Kontakt $\langle F \rangle$ (a) wird in zwei Komponenten zerlegt: die durchschnittliche Normalkraft $\langle F_n \rangle$ (b, linke Achse) und die durchschnittliche Tangentialkraft $\langle F_t \rangle$ (b, rechte Achse). Abbildung (c) zeigt den Anteil der Kontakte nahe oder an der Coulomb-Grenze. Vertikale Linien geben die aus der Spannungs-Dehnungs-Messung ermittelte Bruchfestigkeit des Balkens an. Alle Messungen folgen Protokoll B und sind für harte Partikel ($E_p = 100$ MPa) durchgeführt

Bei höheren Spannungen nimmt die Durchschnittskraft mit zunehmender Spannung ab. Die Bruchfestigkeit entspricht dem Punkt, an dem das Kraftnetzwerk unter der aufgebrachtten Spannung nachgibt.

Im Gegensatz zur durchschnittlichen Gesamtkraft (Abb. 30a) und durchschnittlichen Normalkraft (Abb. 30b, linke y -Achse), die beide für $\sigma > Y_b$ abnehmen, steigt die durchschnittliche Tangentialkraft (Abb. 30b, rechte y -Achse) während des gesamten Biegeprozesses weiter an, auch wenn die Steigerungsrate nach Erreichen der Bruchfestigkeit abnimmt. Dies deutet darauf hin, dass mehr Kontakte die Coulomb-Grenze erreichen, sodass die Partikel gegeneinander gleiten können. Durch das Gleiten der Partikel kann Spannung abgebaut werden und die durchschnittlichen Normalkräfte verringern sich.

Die relative Anzahl der Kontakte, deren Tangentialkraft um nicht mehr als 5% von der Coulomb-Grenze abweicht, ist in Abbildung 30c dargestellt. Sie nimmt während des gesamten Prozesses zu, allerdings mit einer geringeren Rate für $\sigma > Y_b$. Der Partikelreibungskoeffizient μ_p , der die Coulomb-Grenze bestimmt, bestimmt bei einer festen Anzahl von Kontakten (d. h. bei einem gegebenen Feststoffanteil) also auch den quantitativen Schwellenwert, bei dem das Kraftnetzwerk versagt.

Man beachte, dass dieses Verhalten sowohl bei harten als auch bei weichen Partikeln ähnlich ist (hier nicht dargestellt), mit dem Unterschied, dass der Wert der durchschnittlichen Kraft pro Kontakt bei harten Partikeln höher ist als bei weichen Partikeln.

5.3.5 Position der neutralen Achse

Wird ein Balken gebogen, so entstehen zwei Bereiche: Im Bereich oberhalb der neutralen Achse wird der Balken komprimiert. Im Bereich unterhalb der neutralen Achse steht der Balken unter Zug. Dies wird durch die Bewegung der Partikel relativ zum Mittelpunkt des Balkens deutlich, die in Abbildung 31 dargestellt ist. Mit Mittelpunkt des Balkens ist hier die Position $(x; y) = (L_b/2; 0)$ gemeint (Abbildung 15). Im oberen Teil des Balkens bewegen sich die Partikel zur Balkenmitte hin, im unteren Teil von der Balkenmitte weg. Dies steht im Einklang mit früheren Arbeiten über Granulatbalken im Jamming-Zustand [74, 79].

Im komprimierten oberen Teil des Balkens sind Partikelbewegungen entlang der x -Richtung hauptsächlich an den Enden des Balkens groß. Zu Beginn des Biegeversuchs ($\sigma \approx 15 \text{ kPa} \ll Y_b$, Abbildung 31a), bewegen sich alle Partikel in Richtung der Balkenmitte. Partikel an den Balkenenden müssen sich, aufgrund der Kompression des oberen Teils des Balkens, jedoch mehr bewegen als Partikel in der Balkenmitte. In der späteren Phase des Biegeversuchs ($\sigma \gtrsim 100 \text{ kPa} \approx Y_b$, Abbildung 31c) resultieren die großen Verschiebungen an den

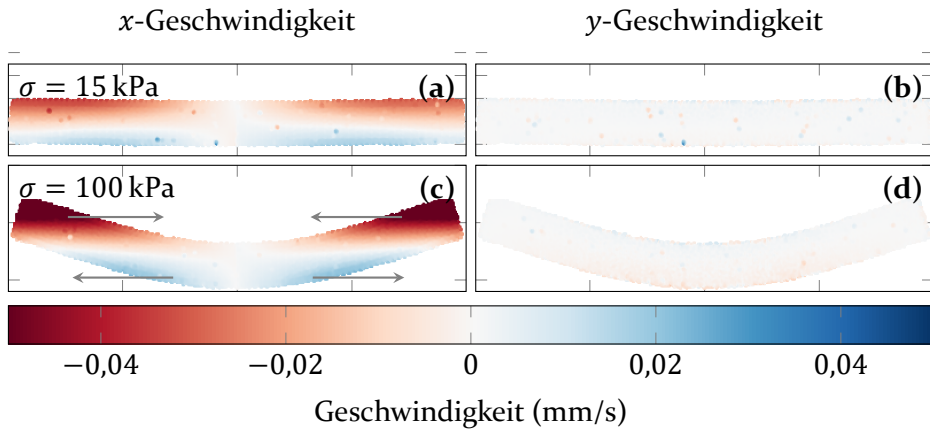


Abbildung 31: Die Bewegung der Partikel relativ zum Zentrum des Balkens. Bewegungen in Richtung des Balkenzentrums werden durch negative Werte, Bewegungen weg vom Balkenzentrum durch positive Werte der Geschwindigkeit angegeben. Die einzelnen Abbildungen zeigen die Bewegung in x - (a, c) und y -Richtung (b, d) bei niedriger (a, b) und großer Biegespannung (c, d). Dargestellt sind die Daten für $\mu_p = 0,3$; $E_b = 100 \text{ MPa}$. Die Geschwindigkeiten werden aus den Partikelpositionen zweier Zeitpunkte im Abstand von 2,5 s ermittelt. Die Mittelungsmethode wird in Anhang C beschrieben

Balkenenden aus der Biegung des Balkens als Ganzes: Die Enden werden durch die Membran nach innen gebogen.

Die Bewegung in y -Richtung relativ zum Zentrum des Balkens ist im Vergleich mit der Bewegung in x -Richtung vernachlässigbar. Dies ist in Abbildungen 31b und 31d an der Farblosigkeit zu erkennen.

Durch den Biegeversuch verschiebt sich die neutrale Ebene (Nullwerte in Abbildung 31) in Richtung des oberen Teils des Balkens.

5.3.6 Deformationsmechanismen

Ein Granulat im Jamming-Zustand reagiert auf zwei Arten auf erzwungene Verformungen: Durch lokale plastische Ereignisse, bei denen ein Partikel eine Reorganisation seiner Umgebung auslöst, oder durch eine affine Deformation, indem sich das Granulat wie ein homogenes Material verformt, und sich alle Partikel bewegen, ohne ihre Position relativ zu ihren Nachbarn zu verändern.

Um den vorherrschenden Mechanismus zu untersuchen, wird in diesem Kapitel die mittlere quadratische Abweichung der Bewegung des Partikels i von

der Bewegung, die durch eine affine Verformung der Packung hervorgerufen würde, betrachtet. Sie ist durch

$$D^2(i, t, t') = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\mathbf{r}_j(t') - \mathbf{r}_i(t') - (\mathbb{1} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)) \right]^2 \quad (47)$$

gegeben [89], wobei t und t' zwei verglichene Zeitpunkte angeben. Die Summe erstreckt sich über alle N Partikel in der Umgebung von Partikel i , und $\boldsymbol{\epsilon}$ ist der Verzerrungstensor, der den affinen Teil der Deformation der Region beschreibt. Das Minimum $D_{\min} = \min_{\boldsymbol{\epsilon}} |D|$ ergibt sich aus der Suche nach dem optimalen $\boldsymbol{\epsilon}$ und quantifiziert die lokale Abweichung von der affinen Deformation. Ein hoher Wert von D_{\min} deutet auf lokale plastische Ereignisse hin, ein niedriger Wert weist auf eine affine Deformation der Packung hin. Im Folgenden werden die D_{\min} der Partikel durch den Vergleich zweier Zeitpunkte im Abstand von 2,5 s ermittelt. Partikel mit weniger als 3 Kontakten werden von der Analyse ausgeschlossen, da sie in ihrer Bewegung nicht vollständig eingeschränkt sind.

Abbildung 32 stellt $D_{\min}/d_{\text{mittel}}$ innerhalb des Balkens für zwei verschiedene Biegespannungen dar. Die Bereiche mit lokaler und affiner Verformung sind in gelb und blau dargestellt. Während des gesamten Experiments bleibt $D_{\min}/d_{\text{mittel}}$ klein und der Balken im Jamming-Zustand verformt sich im Allgemeinen affin.

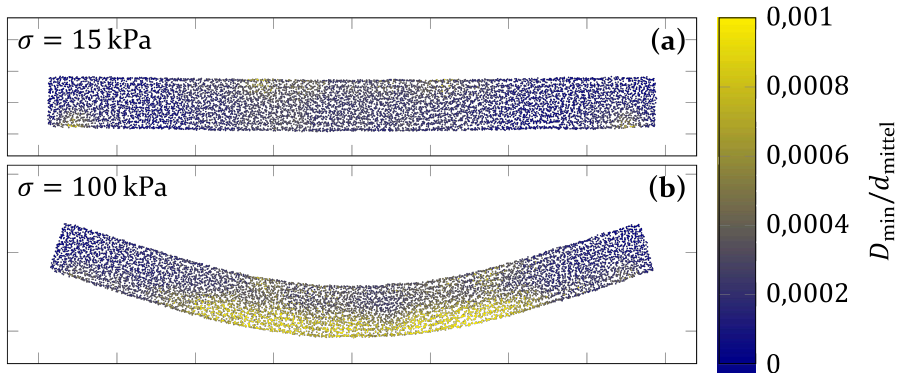


Abbildung 32: $D_{\min}/d_{\text{mittel}}$ innerhalb des Balkens. Dargestellt ist ein Balken mit $E_p = 100 \text{ MPa}$ und $\mu_p = 0,3$ bei einer Biegespannung von $\sigma = 15 \text{ kPa}$ (a) und $\sigma = 100 \text{ kPa}$ (b)

Die räumliche Autokorrelationsfunktion $C(r)$ quantifiziert die Korrelation der D_{\min} Werte der Partikel im Abstand von r . Sie ist durch

$$C_i(r) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{D_{\min,i} D_{\min,j}}{d_{\text{mittel}}}; \quad |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r \pm \Delta r \quad (48)$$

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(r) \quad (49)$$

definiert, wobei $C_i(r)$ die räumliche Autokorrelationsfunktion für einen Partikel i ist und mit allen M Partikeln j im Abstand von $r \pm \Delta r$ berechnet wird. $C(r)$ ist der Mittelwert für alle N Partikel im Balken.

Abbildung 33 zeigt die Autokorrelation für verschiedene externe Biegespannungen. Die Korrelation benachbarter Partikel ist hoch ($C(r)/C(0) > 0,8$) und sinkt mit zunehmendem Abstand r bleibt aber im gesamten untersuchten Bereich hoch. Dies deutet darauf hin, dass die Bewegungen aller Partikel in ähnlichem Maße von der affinen Deformation abweichen. Zwischen verschiedenen Biegespannungen ist kein systematischer Unterschied zu erkennen.

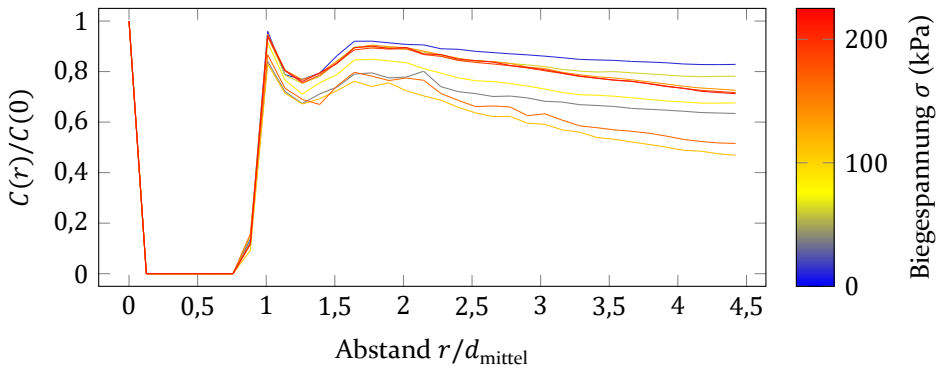


Abbildung 33: Die räumliche Auto-Korrelationsfunktion von D_{\min} . Einzelne Linien sind über Biegespannungsintervalle von 25 kPa gemittelt. Die Linienfarbe gibt den Durchschnitt der Intervalle an. Die angezeigten Daten wurden für $\mu_p = 0,3$ und $E_p = 100$ MPa berechnet

5.3.7 Lokale Dichteveriationen

Um die Änderung des lokalen Feststoffanteils in Verbindung mit dem Deformationsmodus zu quantifizieren, wird in Abbildung 34 $D_{\min}/d_{\text{mittel}}$ für jeden

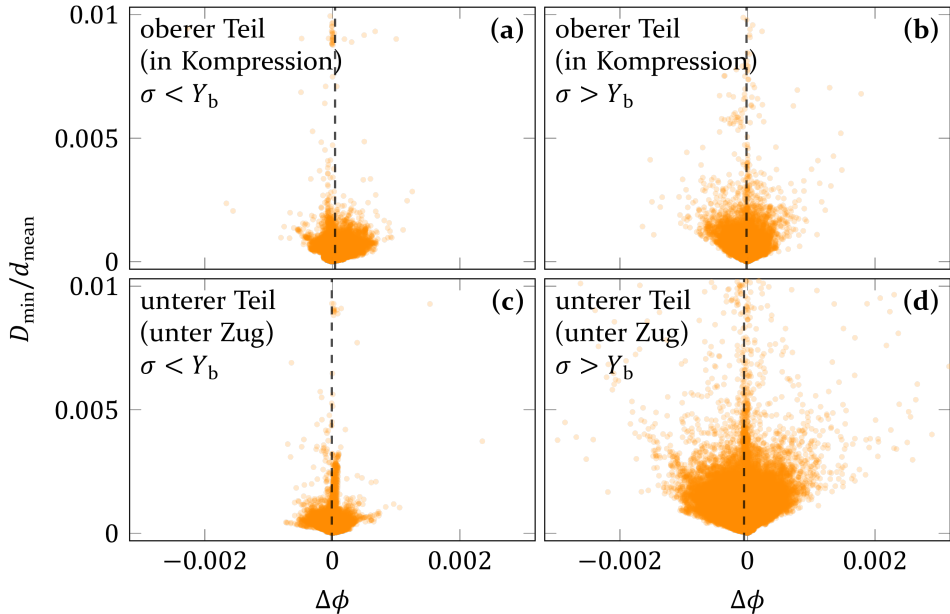


Abbildung 34: D_{\min} -Wert jedes Partikels, geteilt durch den mittleren Partikeldurchmesser d_{mittel} , als Funktion der Änderung $\Delta\phi$ des lokalen Feststoffanteils jedes Partikels. Der Balken ist unterteilt in: (a, b) seinen oberen Teil, der unter Druck steht, und (c, d) seinen unteren Teil, der unter Spannung steht. Ein Partikel befindet sich im oberen Teil, wenn sein Abstand zur oberen Membran kürzer ist als sein Abstand zur unteren Membran. Andernfalls befindet er sich im unteren Teil des Balkens. Abbildungen (a, c) zeigen Daten für $\sigma < Y_b$, Abbildungen (b, d) für $\sigma > Y_b$. Die Punkte sind halbtransparent dargestellt, um Regionen mit vielen überlappenden Punkten zu visualisieren. Die gestrichelten vertikalen Linien zeigen den Durchschnitt $\langle\Delta\phi\rangle$ für alle Punkte in der jeweiligen Unterabbildung. Die dargestellten Daten wurden für $\mu_p = 0,3$ und $E = 100$ MPa ermittelt

Partikel im Balken gegen die Änderung $\Delta\phi$ des lokalen Feststoffanteils aufgetragen. Für diese Analyse wird der lokale Feststoffanteil eines Partikels durch Division des Partikelvolumens durch das Volumen seiner Voronoi-Zelle berechnet. Der lokale Feststoffanteil unterscheidet sich vom globalen Feststoffanteil, der aus dem Gesamtvolumen aller Partikel und dem Gesamtvolumen des Balkens berechnet wird, siehe Abschnitt 1.2. Die gestrichelten Linien stellen den Durchschnitt $\langle\Delta\phi\rangle$ über alle in der Abbildung gezeigten Punkte dar. Im Durchschnitt nimmt der lokale Feststoffanteil der Partikel bei niedriger Biegespannung $\sigma < Y_b$ im oberen Teil des Balkens (Abbildung 34a) aufgrund der Kompression zu ($\langle\Delta\phi\rangle > 0$). Im unteren Teil des Balkens und bei hoher Biegespannung $\sigma > Y_b$ auch im oberen Teil des Balkens verringert sich der lokale Feststoffanteil der Partikel im Durchschnitt ($\langle\Delta\phi\rangle < 0$). Der

Betrag der Änderung des lokalen Feststoffanteils der einzelnen Partikel und deren D_{\min} Wert nehmen mit zunehmender Biegespannung zu.

Die Abweichung von der affinen Deformation D_{\min} ist mit der Änderung des lokalen Feststoffanteils korreliert, sodass für eine große Änderung des lokalen Feststoffanteils auch eine große Abweichung von der affinen Deformation zu erwarten ist. Dies ist an der v-förmigen Unterseite der Punktansammlungen in Abbildung 34 zu erkennen.

5.3.8 Räumliche und zeitliche Verteilung der lokalen Verformung

Abbildung 35 zeigt die Verteilung von D_{\min} als Funktion der Höhe h im Balken für verschiedene Spannungen σ während des Biegeprozesses. In der Anfangsphase der Biegung ist die Abweichung von der affinen Deformation im oberen Teil des Balkens größer als im unteren Teil. Bei hohen Spannungen σ ist die Abweichung im unteren Teil des Balkens größer. Der Übergang zwischen diesen Verhaltensweisen erfolgt bei $\sigma \approx Y_b$.

Abbildung 36 vergleicht D_{\min} entlang der Balkenhöhe für verschiedene Reibungskoeffizienten bei hohem Begrenzungsdruck $175 \text{ kPa} \leq \sigma \leq 200 \text{ kPa}$ gegen Ende des Biegeversuchs. Für alle Reibungskoeffizienten ist eine ähnliche räumliche Verteilung zu beobachten. Eine hohe Reibung der Partikel führt

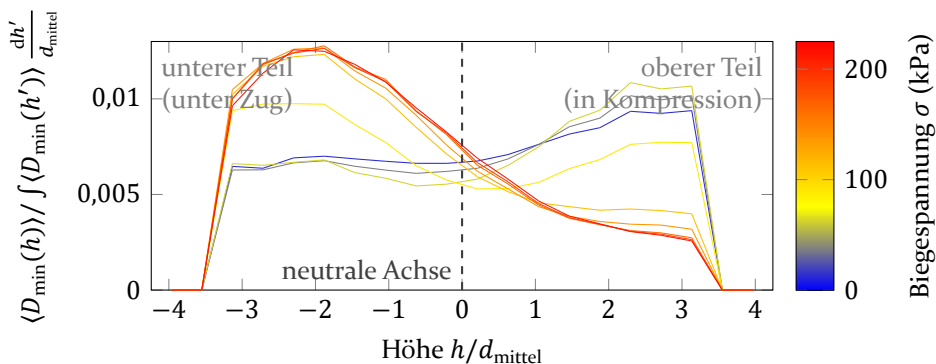


Abbildung 35: Normierte Abweichung von der affinen Deformation D_{\min} als Funktion der Höhe h innerhalb des Balkens. Die Höhe wird von der geometrischen Mittelebene zwischen der Ober- und Unterseite des Balkens gemessen. Negative Werte zeigen Positionen im unteren Teil des Balkens an, positive Werte Positionen im oberen Teil des Balkens. Die verschiedenen Linien sind über den Begrenzungsdruck für Intervalle von 25 kPa gemittelt. Die Linienfarbe gibt den Mittelwert des Intervalls an. Die dargestellten Daten wurden für $\mu_p = 0,3$ und $E_p = 100 \text{ MPa}$ ermittelt.

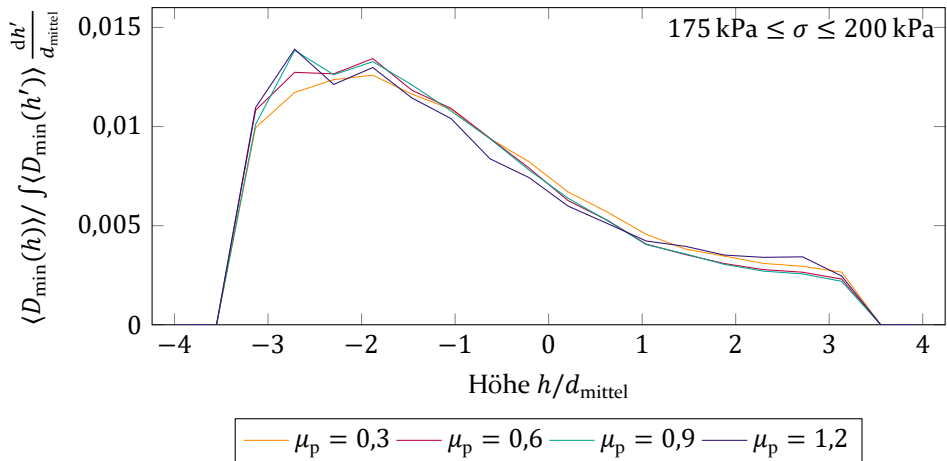


Abbildung 36: Normierte Abweichung von der affinen Deformation D_{\min} als Funktion der Höhe h innerhalb des Balkens für verschiedene Partikelreibungskoeffizienten μ_p . Die Höhe wird von der geometrischen Mittelebene zwischen der Ober- und Unterseite des Balkens gemessen. Negative Werte zeigen Positionen im unteren Teil des Balkens an, positive Werte Positionen im oberen Teil des Balkens

jedoch zu einem ausgeprägteren Unterschied zwischen dem oberen und dem unteren Teil des Balkens, wobei die Bereiche mit hoher Abweichung von der affinen Deformation in Richtung des unteren Teils des Balkens verschoben sind. Diese Verschiebung beruht darauf, dass eine hohe Reibung die Bewegung des unter Druck stehenden Granulats hemmt, sodass im oberen Teil des Balkens die Abweichung von der affinen Deformation vergleichsweise gering ist.

Die relative räumliche Verteilung der Abweichung von der affinen Deformation allein enthält keine Informationen über den Betrag der Abweichung im Verlauf des Biegeprozesses. Abbildung 37 zeigt den Verlauf der Abweichung von der affinen Deformation $\langle D_{\min} \rangle$, die über alle Partikel im Balken gemittelt wurde, gemeinsam mit dem Verlauf des Feststoffanteils ϕ als Funktion der Biegespannung.

Wie der Verlauf der durchschnittlichen Kontaktkraft (Unterabschnitt 5.3.4) ist der Verlauf von $\langle D_{\min} \rangle$ nicht monoton. Er unterteilt jeden Biegeversuch in zwei Bereiche, einen vor und einen nach Erreichen der Bruchfestigkeit $\sigma \approx Y_b$. Bei niedriger Spannung $\sigma < Y_b$ verändert sich $\langle D_{\min} \rangle$ wenig und nimmt für $E_p = 10$ MPa sogar ab. Gleichzeitig verdichtet sich das Granulat. Dies geschieht vorrangig im oberen Teil des Balkens, in dem eine höhere Abweichung von der affinen Deformation festzustellen ist, als im unteren Teil

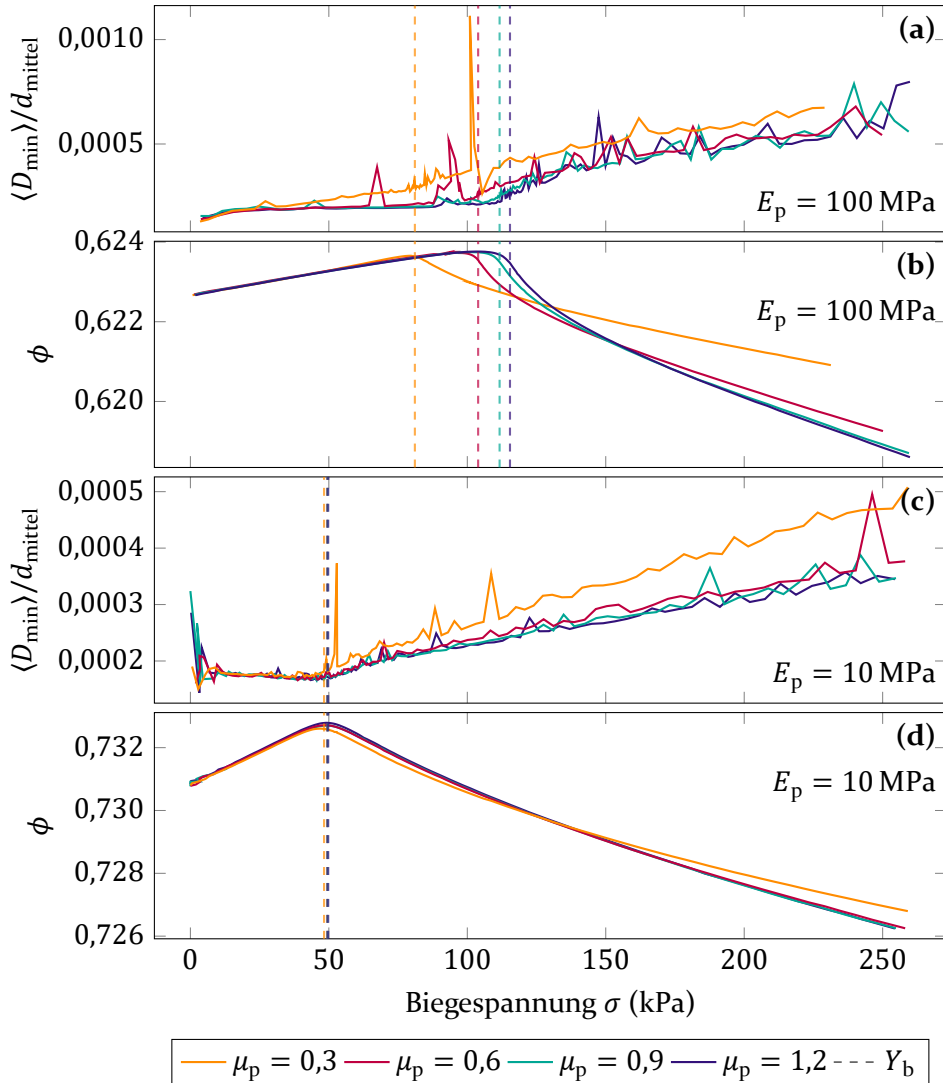


Abbildung 37: Die mittlere Abweichung von der affinen Deformation $\langle D_{\min} \rangle$ geteilt durch den mittleren Partikeldurchmesser d_{mittel} (a, c) und der Feststoffanteil ϕ (b, d) als Funktion der angelegten Biegespannung. Vertikale Linien bei $\sigma = Y_b(\mu_p)$ geben die aus der Spannungs-Dehnungs-Messung erhaltene Bruchfestigkeit des Balkens an. Einzelabbildungen a, b und c, d zeigen jeweils die Werte für $E_p = 100$ MPa und $E_p = 10$ MPa

des Balkens (Abbildung 35). In der zweiten Phase der Biegung, d. h. bei hoher Spannung $\sigma > Y_b$, nimmt $\langle D_{\min} \rangle$ mit zunehmender Spannung zu, während der Feststoffanteil ϕ abnimmt, sodass den Partikeln mehr Raum zur Bewegung bleibt. Dies gilt insbesondere für den unteren, unter Zug stehenden Teil des

Balkens, in dem die D_{\min} Werte der Partikel höher sind als im oberen Teil (Abbildung 35). Dieses zweite Regime entspricht der in Unterabschnitt 5.3.4 beobachteten Destabilisierung des Kraftnetzwerks, die gleichzeitig mit der Destabilisierung des Kontaktnetzes stattfindet.

Alle Biegeversuche weisen unabhängig vom Elastizitätsmodul oder Reibungskoeffizienten der Partikel die beiden oben beschriebenen Regimes auf. Dennoch haben beide Größen einen Einfluss auf den Verlauf der Kurven. Betrachtet man die Abweichung von der affinen Deformation für $E_p = 10$ MPa und $E_p = 100$ MPa, so stellt man fest, dass das Ausmaß der Abweichung in Balken mit weichen Partikeln (Abbildung 37c) kleiner ist als in Balken mit harten Partikeln (Abbildung 37a). Dies ist eine Folge des dichteren Granulats, das für weiche Partikel erzielt wird: Die höhere Verformbarkeit weicher Partikel bewirkt, dass bei gleichem Begrenzungsdruck ein höherer Feststoffanteil als bei harten Partikeln erreicht wird. Eine dichtere Packung erschwert die Relativbewegung der Partikel und die Abweichung von der affinen Deformation.

5.4 Zusammenfassung

Die Eigenschaften granularer Metamaterialien hängen stark von den Eigenschaften der sie bildenden Partikel und von der räumlichen Anordnung dieser Partikel ab. In diesem Kapitel wurde der Einfluss des Elastizitätsmoduls der Granulartpartikel und der Membran, des Reibungskoeffizienten der Granulartpartikel und des Begrenzungsdrucks auf die mechanischen Eigenschaften eines granularen Balkens untersucht. Dabei wurde auch auf die strukturellen Eigenschaften des Balkens eingegangen und analysiert, wie diese durch die Partikeleigenschaften beeinflusst werden.

Die Elastizitätsmoduln von Granulartpartikeln, Membran und Balken und der Begrenzungsdruck konnten über ein Potenzgesetz miteinander in Verbindung gebracht werden: Hohe Elastizitätsmoduln von Membran und Partikeln und ein hoher Begrenzungsdruck führen zu einem hohen Elastizitätsmodul des Balkens. Eine hohe Bruchfestigkeit kann mit harten Partikeln erreicht werden.

Die Reibung der Partikel μ_p hat einen komplexeren Einfluss auf die Reaktion des granularen Balkens. Reibung ist notwendig, damit der Balken stabil ist. Ohne Reibung ($\mu_p = 0$) gibt es keinen Widerstand gegen das Gleiten der Partikel gegeneinander, und eine minimale Belastung kann eine Umstrukturierung innerhalb des Balkens hervorrufen. Wird der gleiche Partikelreibungskoeffizienten zum Erstellen der Ausgangsbedingung und während des Biegeversuchs verwendet, so erhöhen hohe μ_p die Bruchfestigkeit des Balkens, verringern

aber entgegen der Intuition den Elastizitätsmodul des Balkens. Durch Variation der Ausgangsbedingungen konnte gezeigt werden, dass diese Abnahme des Elastizitätsmoduls des Balkens ein Effekt des Feststoffanteils ist: Wird sichergestellt, dass der Feststoffanteil des Balkens auch bei unterschiedlichen Reibungskoeffizienten gleich ist, hat die Reibung der Partikel keinen Einfluss auf den Elastizitätsmodul des Granulats. Die Abhängigkeit der Bruchfestigkeit $Y_b(\mu_p)$ vom Reibungskoeffizienten der Partikel bleibt jedoch bestehen.

Diese Ergebnisse machen deutlich, dass sowohl die Materialeigenschaften der Partikel als auch das Präparationsprotokoll für die Bestimmung der Eigenschaften von Metamaterialien mit Granulat im Jamming-Zustand von entscheidender Bedeutung sind.

Über die Berechnung von Elastizitätsmodul und Bruchfestigkeit hinaus konnte gezeigt werden, dass die Bruchfestigkeit, die anhand von Spannungs-Dehnungs-Kurven gemessene wurde, mit dem Versagen des Kraftnetzwerks zusammenfällt. Durch dieses Versagen werden zwei Regimes abgegrenzt, die für alle untersuchten Partikeleigenschaften gleich bleiben. Vor dem Versagen nimmt die durchschnittliche Kraft pro Kontakt zu. Ab dem Versagen des Kraftnetzwerks nähern sich immer mehr Kontakte der Coulomb-Grenze, sodass sie brechen und Spannung abgebaut wird.

Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass die Deformation des Balkens allgemein auf affine Weise geschieht. Dies bedeutet, dass das Granulat in einer koordinierten Bewegung der Partikel komprimiert oder expandiert wird. Lokale plastische Ereignisse tragen vor dem Versagen des Kraftnetzwerks hauptsächlich zur Verdichtung im oberen, komprimierten Teil des Balkens bei. Im unteren Teil des Balkens, der unter Zug steht, treten sie bei höheren Spannungen aufgrund der geringeren Feststoffanteile auf.

6 Vibrationsinduzierte Konvektion in Schwerelosigkeit

6.1 Einleitung

In den Kapiteln 4 und 5 wurde auf die Eigenschaften eines Granulats im Jamming-Zustand eingegangen. In diesem Kapitel wird nun ein Granulat untersucht, bei dem der Jamming-Übergang periodisch auftritt. Dieser regelmäßige Übergang wird durch Vibrationen erzielt. Der Fokus der Analyse dieses Kapitels ist jedoch nicht der Jamming-Zustand bzw. Jamming-Übergang selbst, sondern die Konvektion, die durch das Vibrieren des Granulats hervorgerufen wird. Konvektion bezeichnet hier eine systematische Reorganisation der relativen Partikelpositionen im Granulat.

Bereits Faraday [90] beobachtete Konvektion in Granulaten. Seitdem beschäftigten sich zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten dem Phänomen der Konvektion in Experimenten, Simulationen und Theorien [10, 11, 91, 92, 93, 94]. Vibriert ein mit Granulat gefüllter Behälter vertikal, so tritt Konvektion auf, bei der sich die Partikel in der Mitte des Behälters nach oben und am Rand des Behälters nach unten bewegen [91], siehe Abbildung 38. Diese Konvektion wird nachfolgend $c\uparrow$ -Konvektion genannt. Auch horizontale Vibrationen können diese Konvektion hervorrufen [95, 96]. Dieses Kapitel befasst sich jedoch ausschließlich mit Konvektion aufgrund vertikaler Vibrationen.

Konvektion tritt bei Vibrationen mit Amplitude A_0 und Frequenz f auf, wenn die maximale Beschleunigung $a = 4\pi^2 A_0 f^2$ eine minimal nötige Anregung überschreitet [9]. Die minimal nötige Anregung ist ungefähr gleich dem Betrag der Gravitationsbeschleunigung, kann jedoch auch davon abweichen [91, 94]. Die Stärke der Konvektion hängt von der Amplitude und Frequenz ab. Erhöht man die Vibrationsfrequenz, wird die Konvektion schwächer. Erhöht man die Amplitude der Vibration, wird die Konvektion stärker [97]. Auch die Beschaffenheit des Behälters und der Partikel beeinflussen die Konvektion. Eine hohe Reibung zwischen Partikel und Behälter führt zu einer starken Konvektion. Bei niedriger Reibung zwischen Partikel und Behälter tritt keine Konvektion mehr auf oder sie ist invertiert, sodass sich das Granulat entlang der Wände nach oben und in der Mitte des Containers nach unten bewegt ($c\downarrow$ -Konvektion) [92, 93, 98]. Durch Neigung der Containerwände kann es zu invertierter Konvektion und mehreren Konvektionszellen kommen [10, 99].

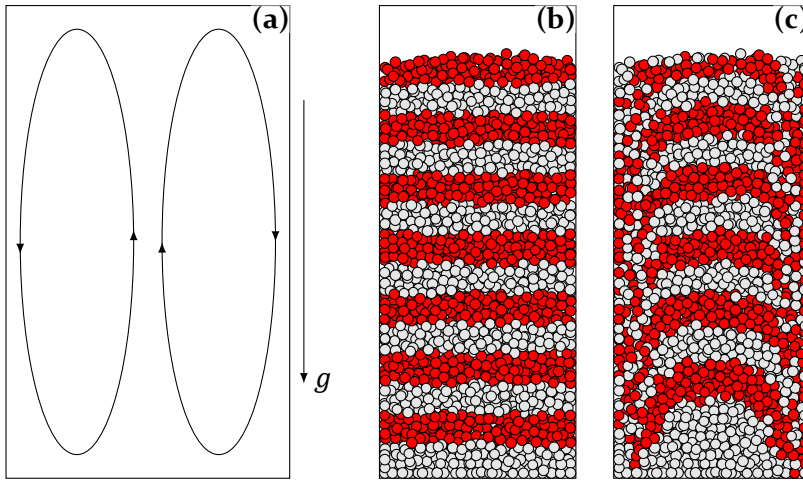


Abbildung 38: Konvektion in vertikal vibrierten Behältern unter Bedingungen der Schwerkraft. Abbildung (a) zeigt die Richtung der Konvektion. Abbildungen (b) und (c) zeigen ein Granulat vor und nach dem Vibrieren. Die Farbe der Partikel repräsentiert die vertikale Position der Partikel vor der Vibration. Der Pfeil gibt die Richtung der Gravitation an

Die Konvektion in Schwerkraftbedingungen wird durch das Zusammenspiel der Schwerkraft und der Reibung zwischen Granulat und Behälter über eine Vibrationsperiode hervorgerufen [7, 8, 9]: Zu Beginn der Aufwärtsbewegung des Behälters wird das Granulat durch die Schwerkraft am Boden des Behälters gehalten und befindet sich im Jamming-Zustand (Abb. 39a). Sobald die Vibrationsbeschleunigung in Richtung der Gravitationsbeschleunigung die minimal nötige Anregung überschreitet, wird das Granulat nahe der Seitenwände wegen der Wandreibung stärker beschleunigt als das Granulat in der Mitte des Behälters, sodass ein Geschwindigkeitsgradient im Granulat entsteht (Abb. 39b). Dieser führt dazu, dass sich die Ober- und Unterseite des Granulats krümmen und sich Partikel in der Mitte des Behälters an höheren Positionen befinden als Partikel nahe der Wände (Abb. 39c). Daher ist der Feststoffanteil an der Unterseite des Granulats in der Mitte des Behälters niedriger als an den Behälterwänden, und das Granulat kann sich von den Wänden Richtung Mitte des Behälters bewegen. Auf der Oberseite des Granulats ist es umgekehrt, und Partikel in der Mitte des Behälters können sich zu den Seitenwänden bewegen, an denen der Feststoffanteil niedrig ist. Partikel, die sich von den Seitenwänden zur Mitte des Behälters bewegen, nehmen dort Platz ein. Partikel in der Mitte des Behälters können nicht zu ihrer ursprünglichen vertikalen Position zurückkehren und müssen in Richtung der Seitenwände ausweichen (Abb. 39d). Sobald das Granulat wieder vollständig im Jamming-Zustand ist, beginnt der Prozess von vorn.

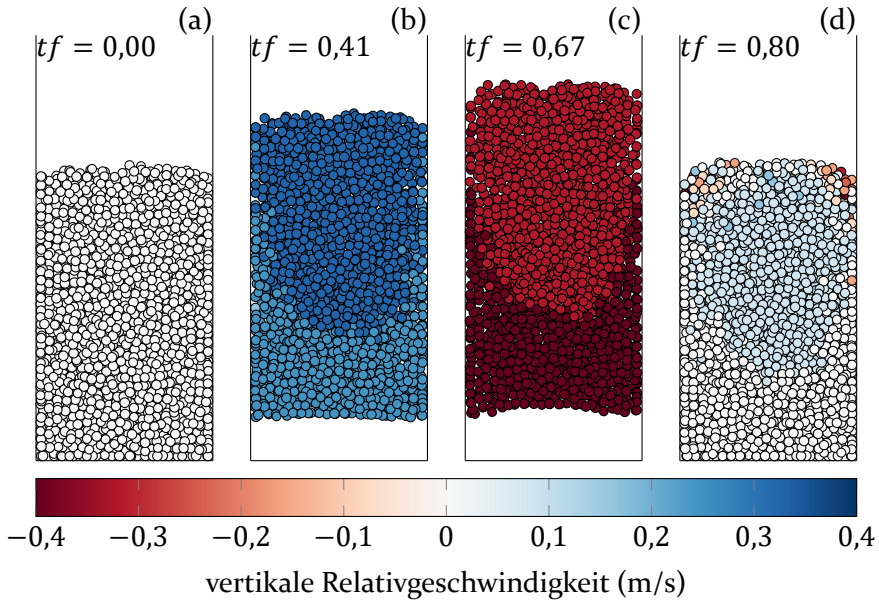


Abbildung 39: Momentaufnahmen eines mit Granulat gefüllten Behälters, der mit Frequenz $f = 6$ Hz und Amplitude $A_0 = 1,25$ cm vibriert. Geschwindigkeiten sind relativ zum Behälter angegeben.

Konvektion unter Bedingungen der Schwerelosigkeit ist weniger erforscht. Rodríguez-Rivas u. a. [100] konnten mit zweidimensionalen, ereignisgesteuerten Simulationen granularer Gase zeigen, dass ohne Schwerkraft vier symmetrische Konvektionszellen entstehen. Abbildung 40 zeigt die beobachtete Konvektion, wie sie in Granulaten mit höherem Feststoffanteil aussähe. Im Folgenden wird diese Konvektion $c\uparrow$ -Konvektion genannt.

Dieses Kapitel befasst sich mit Konvektion in Granulaten unter Bedingungen der Schwerelosigkeit. Dazu werden DEM-Simulationen verwendet, und Experimente von Pöschel u. a. [101] ausgewertet. Dabei wird auf die Ursachen der Konvektion und Abweichungen von der erwarteten Konvektion eingegangen.

6.2 Konvektionsmechanismus in der Schwerelosigkeit

Um die Ursachen der Konvektion in der Schwerelosigkeit zu analysieren, wird in diesem Kapitel auf DEM-Simulationen zurückgegriffen. Diese bestehen aus zwei Schritten:

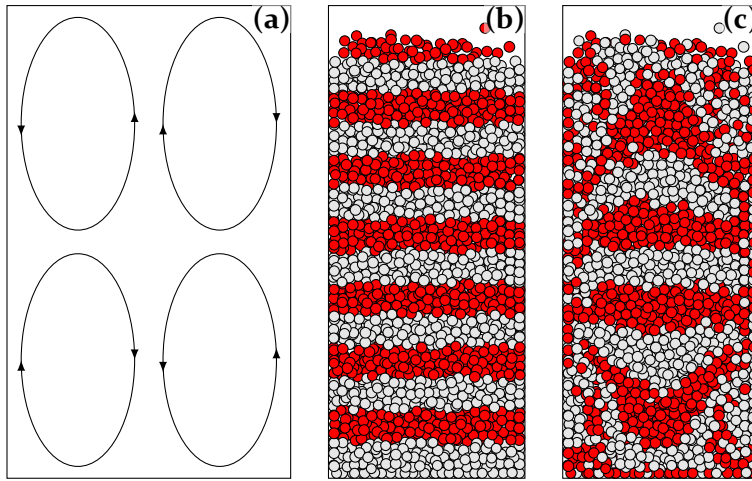


Abbildung 40: Konvektion in vertikal vibrierten Behältern unter Bedingungen der Schwerelosigkeit. Abbildung (a) zeigt die Richtung der Konvektion. Abbildungen (b) und (c) zeigen ein Granulat vor und nach dem Vibrieren. Die Farbe der Partikel repräsentiert die vertikale Position der Partikel vor der Vibration

1. Ein Zylinder mit Radius $R_c = 1,35$ cm und Höhe $h_c = 6,5$ cm wird am Ursprung des Koordinatensystems platziert. Anschließend werden Partikel mit gleichmäßig verteiltem Radius $R \in [0,665; 0,735]$ mm zufällig innerhalb des Zylinders platziert, sodass sie nicht miteinander in Kontakt kommen. Die Partikelradien werden dann schrittweise mit dem Lubachevsky-Stillinger-Algorithmus [54] erhöht, bis der Feststoffanteil $\phi = 0,52$ im Zylinder erreicht ist.
2. Der Zylinder wird einer Vibration mit Amplitude A_0 und Frequenz f ausgesetzt, sodass die Funktion

$$z_c(t) = A_0 \sin(2\pi f t) \quad (50)$$

die z -Koordinate der Position des Zylinderzentrums beschreibt.

Abbildung 41 zeigt Momentaufnahmen dieser Schritte aus einer Beispielsimulation und definiert das Koordinatensystem für die weitere Analyse. Tabelle 9 gibt die Materialparameter der Simulation an.

Die Auswertung der Simulationen erfolgt auf zwei Arten. Dazu werden Partikel ausgewählt, deren Positionen nicht mehr als 1,5 mm von der x - z -Ebene durch die Zylinderachse abweichen (Abbildungen 41a, 41e). Einerseits werden die Partikelpositionen vor und nach der Vibration verglichen. Andererseits werden die Partikel verwendet, um die mittleren Konvektionsgeschwindigkeiten v_{konv}

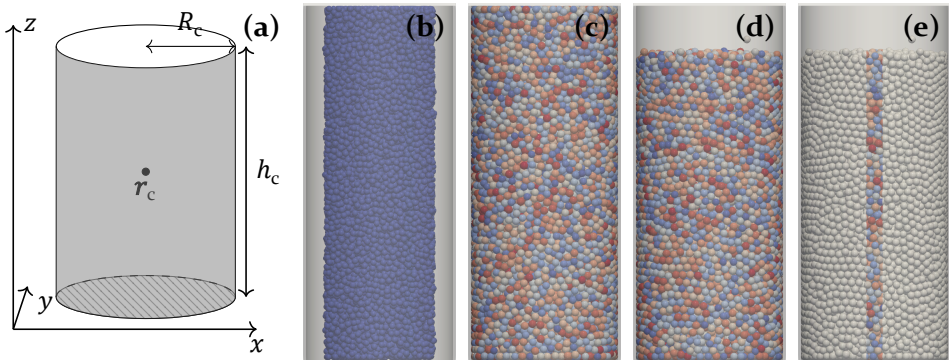


Abbildung 41: Skizze des Zylinders (a) und Momentaufnahmen aus einer Beispielsimulation (b) bis (d). Die einzelnen Abbildungen zeigen die Anfangsbedingung (b), die Partikel mit ihrem endgültigen Radius (c), sowie den Zustand am Ende der Simulation (d). Abbildung (e) deutet den in der Analyse der Konvektion verwendeten Bereich an. Die Farbe der Partikel repräsentiert den Partikelradius. Die schraffierte Wand in (a) kennzeichnet die untere Wand des Zylinders, die der oberen Wand gegenüberliegt. Das Zylinderzentrum befindet sich an der Position $\mathbf{r}_c(t) = (0, 0, z_c(t))^T$

Tabelle 9: Materialparameter der Konvektionssimulation

| Parameter | Wert |
|---------------------------|---------|
| Elastizitätsmodul E | 100 MPa |
| Poissonzahl ν | 0,245 |
| Reibungskoeffizient μ | 0,5 |
| A | 7 ns |
| γ_t | 0,3 |

in der x - z -Ebene zu berechnen. Die Geschwindigkeiten können mit der in Anhang C beschriebenen Mittelungsmethode durch den Vergleich zweier Zeitpunkte im Abstand einer Periodendauer $1/f$ ermittelt werden. In diesem Kapitel wird die Konvektionsgeschwindigkeit mit $\frac{v_{\text{konv}}}{f d_{\text{mittel}}}$ angegeben, wobei d_{mittel} der mittlere Partikeldurchmesser ist.

Abbildung 42 zeigt beide Visualisierungen für eine Simulation mit Amplitude $A_0 = 1$ cm und Frequenz $f = 12$ Hz. Wie erwartet ist die Konvektion eine $c\uparrow$ -Konvektion, die bereits von Rodríguez-Rivas u. a. [100] für granulare Gase beobachtet wurde.

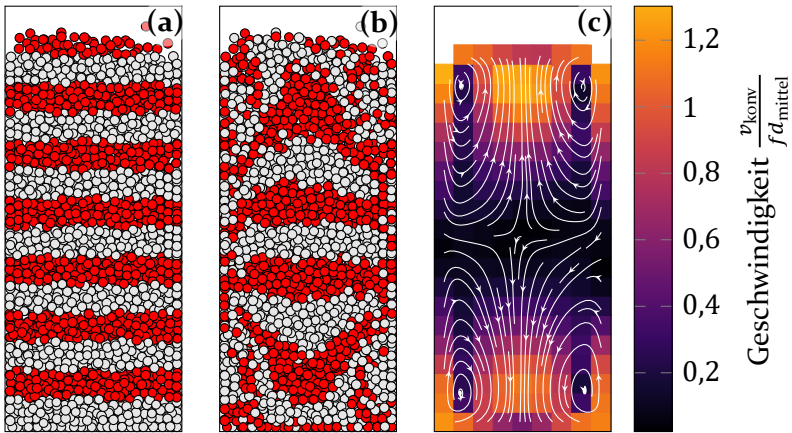


Abbildung 42: Die Konvektion in der x - z -Ebene für eine Vibration mit Frequenz $f = 12$ Hz und Amplitude $A_0 = 1$ cm. Abbildungen (a) und (b) zeigen die Partikel vor der Vibration und nach 15 Vibrationsperioden. Die Farbe der Partikel repräsentiert die vertikale Position der Partikel vor der Vibration. Abbildung (c) zeigt das Feld der Konvektionsgeschwindigkeit

Wie unter Bedingungen der Schwerkraft ist auch in der Schwerelosigkeit die Reibung zwischen Zylinderwand und Granulat entscheidend für die Konvektion. Abbildung 43 zeigt die Partikelgeschwindigkeit relativ zum Zylinder vor und nach den Kollisionen zwischen Granulat und der unteren Wand (untere Kollision) bzw. der oberen Wand (obere Kollision). Direkt nach den Kollisionen (Abbildungen 43a und 43c) ist ein Geschwindigkeitsgradient im Granulat zu erkennen. Dieser entsteht, da sich das Granulat direkt nach der Kollision, in der es komprimiert wurde, wieder ausdehnt. Partikel an der Seitenwand des Zylinders werden in ihrer Bewegung durch die Wandreibung behindert, sodass sich das Granulat in der Mitte des Zylinders schneller ausdehnen kann. Nachdem der Zylinder sein Geschwindigkeitsmaximum durchlaufen hat und wieder abbremst, wird der Geschwindigkeitsgradient verstärkt: Partikel an den Seitenwänden werden durch Wandreibung schneller abgebremst als Partikel in der Zylindermitte. Durch beide Effekte ist an der Ober- oder Unterseite des Granulats der Feststoffanteil in der Mitte des Zylinders größer als am Rand (Abbildungen 43b und 43d), sodass sich Partikel aus der Zylindermitte in Richtung der seitlichen Zylinderwand bewegen können. Bei der nächsten Kollision kann das langsamere Granulat an den Seitenwänden nicht zu seiner ursprünglichen Position zurückkehren und muss ausweichen. Da dieses Verhalten in beide Bewegungsrichtungen symmetrisch ist, kommt es zu einer symmetrischen $c\updownarrow$ -Konvektion, bei der sich das Granulat in der Mitte des Zylinders jeweils zur nächsten Wand in Vibrationsrichtung bewegt.

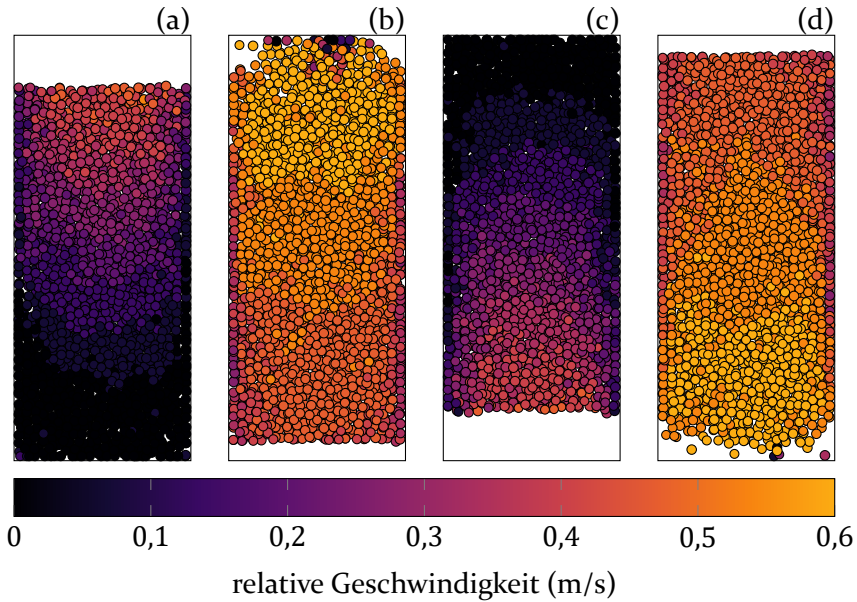


Abbildung 43: Der Betrag der z-Geschwindigkeit der Partikel in der x-z-Ebene. Einzelabbildungen zeigen die Geschwindigkeiten direkt nach der Kollision mit der unteren Wand (a), zu Beginn (b) und nach der Kollision (c) mit der oberen Wand und zu Beginn der Kollision mit der unteren Wand (d)

Um den Einfluss der Wandreibung zu verdeutlichen, ist in Abbildung 44 die Konvektion für Simulationen mit den Wandreibungskoeffizienten $\mu_w \in \{0,0; 0,25; 0,5; 0,75\}$ dargestellt. Ohne Reibung zwischen Zylinder und Granulat ist keine Konvektion zu erkennen. Bei niedriger Wandreibung $\mu_w = 0,25$ ist $c\uparrow$ -Konvektion mit geringer Stärke zu sehen. Für höhere Reibungskoeffizienten, $\mu_w = 0,5$ und $\mu_w = 0,75$, ist die Konvektion stärker. Dennoch scheint eine höhere Reibung nicht automatisch zu einer stärkeren Konvektion zu führen: In Abbildung 44 ist die Konvektion bei $\mu_w = 0,5$ stärker als bei $\mu_w = 0,75$.

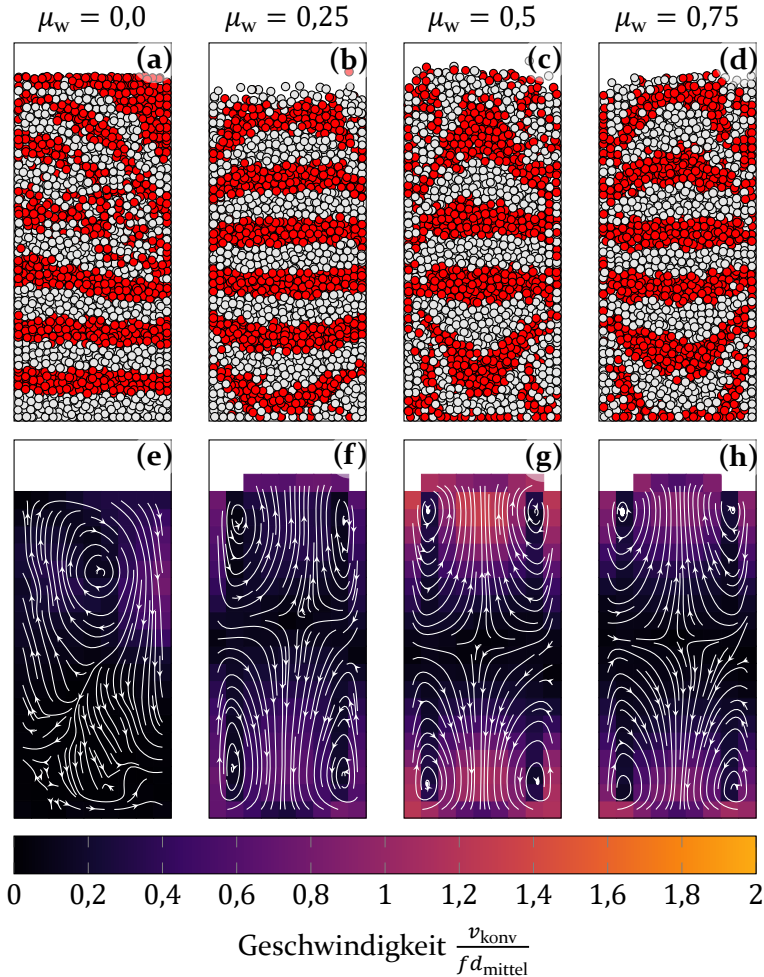


Abbildung 44: Die Konvektion in der x - z -Ebene für eine Vibration mit Frequenz $f = 12$ Hz, Amplitude $A_0 = 1$ cm und verschiedenen Reibungskoeffizienten μ_w zwischen Granulat und Zylinder. Abbildungen (a) bis (d) zeigen die Positionen einzelner Partikel, Abbildungen (e) bis (f) das Feld der Konvektionsgeschwindigkeit

6.3 Konvektion ohne oben-unten-Symmetrie

Bei genauem Hinsehen kann man erkennen, dass die Konvektion in der Schwerelosigkeit nicht immer vollständig symmetrisch ist, z. B. in Abbildung 44f. Durch eine geschickte Wahl der Vibrationsparameter erhält man eine $c\uparrow$ - oder $c\downarrow$ -Konvektion, bei der sich die Partikel entlang der Zylinderachse nur nach oben oder unten bewegen. Abbildung 45 zeigt zwei Beispiele mit unterschiedlicher Konvektionsrichtung. Die Simulationen unterscheiden sich lediglich

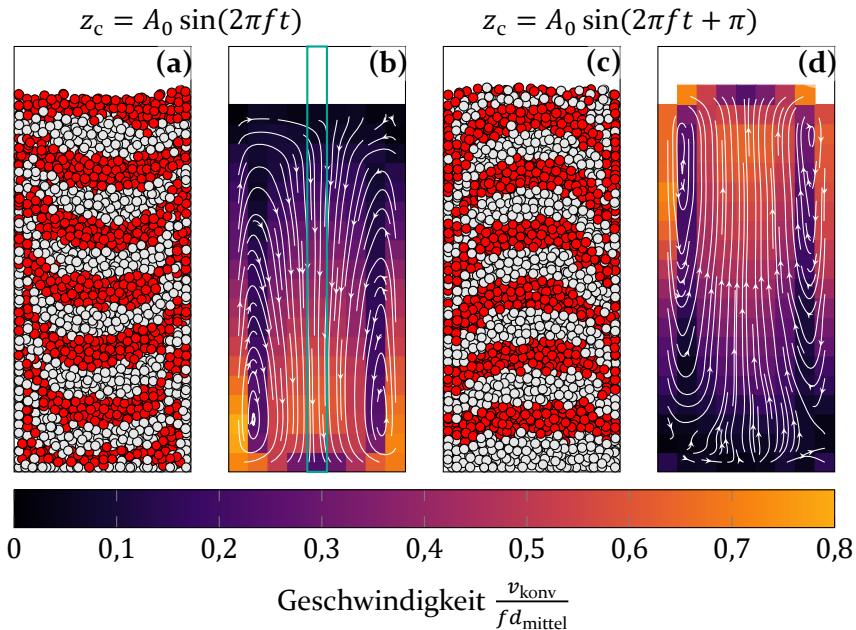


Abbildung 45: Die Konvektion in der x - z -Ebene für eine Vibration mit Frequenz $f = 12$ Hz und Amplitude $A_0 = 5$ mm bei identischen Ausgangsbedingungen und einer Phasenverschiebung von π . Der grün markierte Bereich wird in Unterabschnitt 6.3.2 für die weitere Analyse verwendet

in der Phase der Vibration. Eine Simulation startet in der Aufwärtsbewegung, die andere in der Abwärtsbewegung.

Aufgrund dieser Beobachtung stellen sich zwei Fragen:

1. Was bricht die oben-unten Symmetrie in Abwesenheit der Schwerkraft?
2. Wann wird die Konvektion symmetrisch?

6.3.1 Ursache der Symmetriebrechung

Abbildung 46 zeigt die Geschwindigkeit einzelner Partikel relativ zum Zylinder direkt vor und nach der oberen und unteren Kollision für eine Vibration mit den gleichen Parametern wie in Abbildungen 45a und 45b. Vor der oberen Kollision hat das Granulat eine höhere Geschwindigkeit und eine geringere Volumenausdehnung als vor der unteren Kollision (Abbildungen 46a und 46c). Ein Geschwindigkeitsgradient ist lediglich nach der oberen Kollision zu erkennen (Abbildungen 46b und 46d).

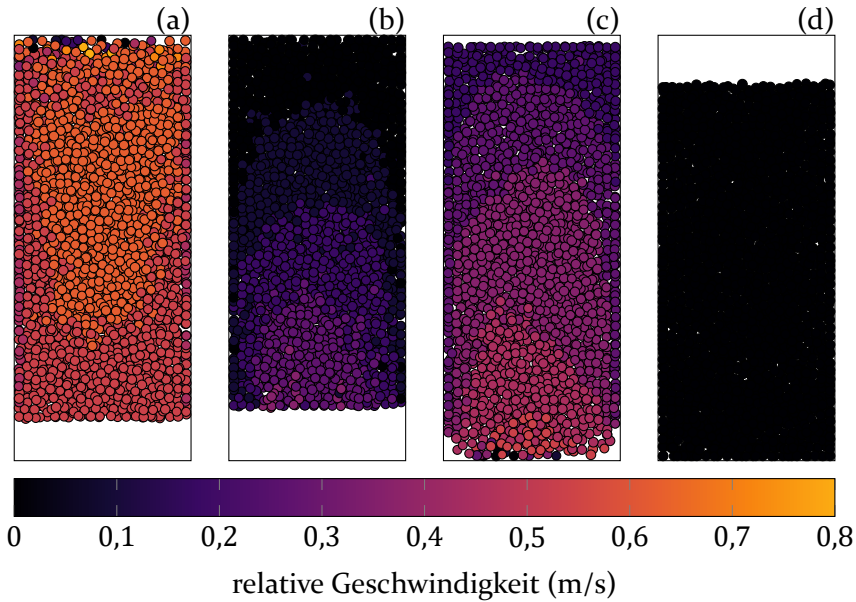


Abbildung 46: Die z-Geschwindigkeit der Partikel in der x - z -Ebene relativ zum Zylinder für eine Vibration mit Frequenz $f = 12$ Hz und Amplitude $A_0 = 5$ mm. Einzelabbildungen zeigen Momentaufnahmen vor (a) und nach (b) der oberen Kollision und vor (c) und nach (d) der unteren Kollision

Aufgrund der geringen Volumenausdehnung muss das Granulat bei der oberen Kollision kaum komprimiert werden und kann sich sofort ausbreiten. Wegen der hohen Relativgeschwindigkeit bei der Kollision ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit groß. Bei der unteren Kollision wird das weniger dichte Granulat langsam komprimiert. Danach kann es sich kaum ausdehnen, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit aufgrund der geringen Kollisionsgeschwindigkeit klein ist, und die Ausdehnung vom schneller werdenden Zylinder gestoppt wird.

Die Relativgeschwindigkeiten bei beiden Kollision unterscheiden sich, da beide Kollisionen während der Abwärtsbewegung des Zylinders stattfinden (Abbildung 47). Nach der oberen Kollision breitet sich das Granulat schnell aus und die ersten Partikel können die untere Wand des Zylinders noch vor dem Richtungswechsel des Zylinders erreichen. Nach der unteren Kollision bleibt das Granulat kompakt und erreicht die obere Wand des Zylinders daher später.

Alle Voraussetzungen für den Ablauf der oberen bzw. unteren Kollision sind durch die jeweils andere geschaffen.

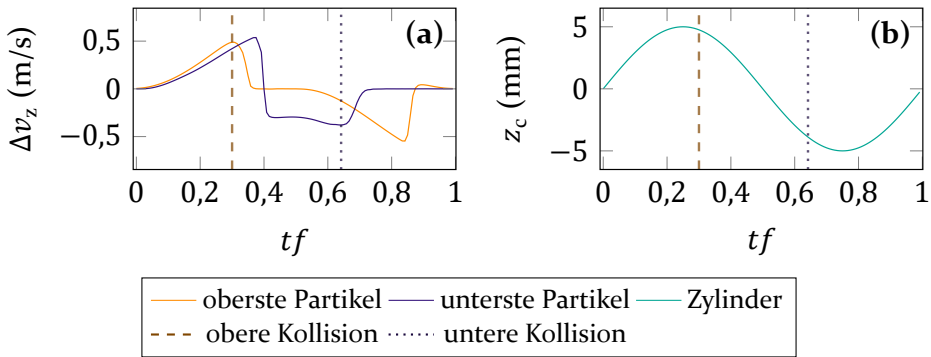


Abbildung 47: Partikelgeschwindigkeiten relativ zum Zylinder (a) und Position des Zylinders (b) im Verlauf einer Periode einer Vibration mit Frequenz $f = 12$ Hz und Amplitude $A_0 = 5$ mm ohne Phase. Die relativen Partikelgeschwindigkeiten sind jeweils der Durchschnitt der 100 obersten und untersten Partikel im Zylinder. Gestrichelte bzw. gepunktete vertikale Linien geben den Zeitpunkt der Kollision (gemessen an der Geschwindigkeit) mit dem oberen bzw. unteren Ende des Zylinders an. Alle Werte sind über 45 Perioden gemittelt

6.3.2 Wann wird die Konvektion symmetrisch?

Eine Phasenverschiebung von π invertiert die Konvektion (Abbildung 45). Möglicherweise kann durch die richtige Wahl der Phase eine symmetrische Konvektion erreicht werden. Modifiziert man Gleichung (50), sodass die Vibration die Form

$$z_c(t) = A_0 \sin(2\pi ft + \varphi) \quad (51)$$

hat, kann die Phase durch φ eingestellt werden.

Um verschiedene Konvektionen einfacher vergleichen zu können, wird anstatt des gesamten Felds der Konvektionsgeschwindigkeit nur die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit v_{konv}^c entlang der Zylinderachse betrachtet. Dazu wird die Geschwindigkeit in einer Box der Dimension $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm} \times h_c$ um die Zylinderachse berechnet. Das grüne Rechteck in Abbildung 45b zeigt den verwendeten Bereich. Ist die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit entlang der Zylinderachse null, heben sich die Geschwindigkeiten in axialer Richtung auf, und die Konvektion ist oben-unten symmetrisch. Wenn die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit ungleich null ist, dann ist die Konvektion asymmetrisch.

Abbildung 48 zeigt die mittlere Geschwindigkeit für verschiedene Phasen einer Vibration mit Frequenz $f = 12$ Hz und Amplitude $A_0 = 5$ mm. Für alle Phasen hat die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit einen ähnlichen Betrag und ist ungleich null. An zwei Stellen wechselt sie das Vorzeichen. Mit der

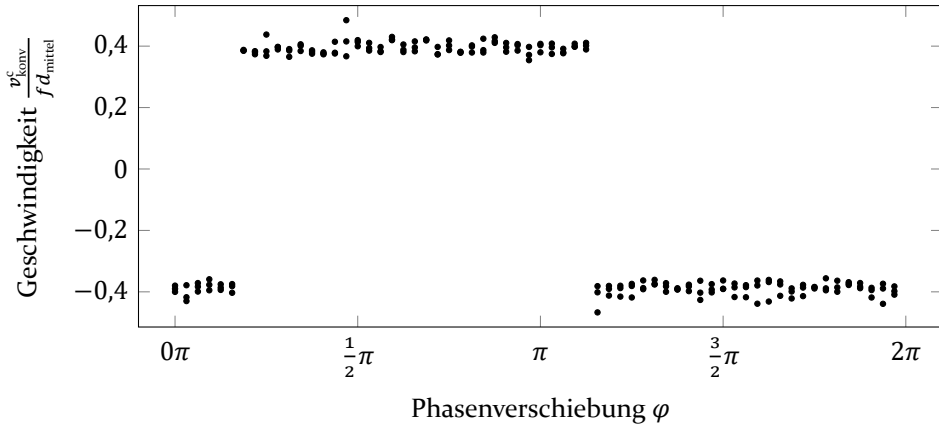


Abbildung 48: Die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit entlang der Zylinderachse. Verschiedene Punkte bei gleicher Phase entsprechen unterschiedlichen Partikelpositionen zu Beginn der Simulation

Phase kann die Konvektionsart ($c\uparrow$ - oder $c\downarrow$ -Konvektion) also nicht beeinflusst werden. Sie wirkt sich lediglich auf die Richtung ($c\uparrow$ - oder $c\downarrow$ -Konvektion) aus, indem sie beeinflusst, auf welcher Seite erstmalig eine Kollision mit hoher Dichte und hoher Relativgeschwindigkeit, oder niedriger Dichte und niedriger Relativgeschwindigkeit stattfindet.

Möglicherweise haben andere Vibrationsparameter Einfluss auf die Symmetrie der Konvektion: Die symmetrische Konvektion in Abschnitt 6.2 und die asymmetrische Konvektion in diesem Abschnitt unterscheiden sich nur in der Vibrationsamplitude. Abbildung 49 stellt die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit entlang der Zylinderachse für verschiedenen Amplituden A_0 dar. Für $A_0 < 0,75$ cm ist die Konvektion asymmetrisch. Für $A_0 > 0,75$ cm ist die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit beinahe null und die Konvektion ist ungefähr symmetrisch. Bei $A_0 = 0,75$ cm gibt es einen Übergang, bei dem sowohl symmetrische als auch asymmetrische Konvektion auftritt. Die Konvektionsart kann also durch die Amplitude der Vibration beeinflusst werden. Denkbar sind auch Einflüsse der Frequenz, der Zylinderhöhe und der Füllhöhe des Zylinders, diese werden hier jedoch nicht weiter analysiert.

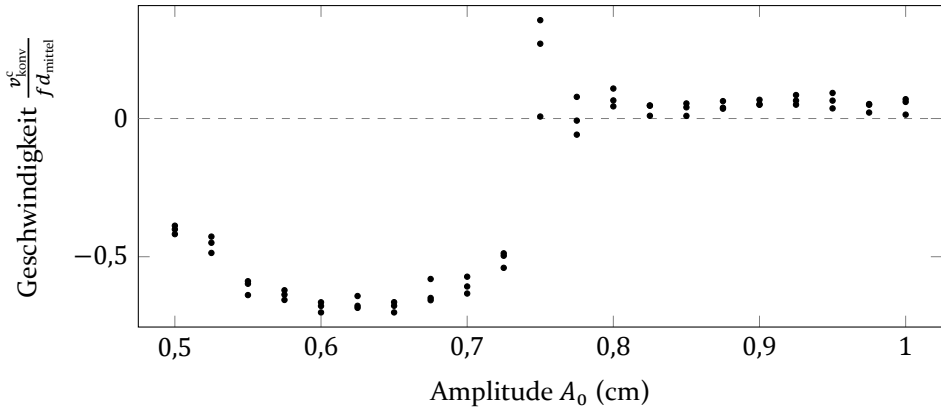


Abbildung 49: Die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit in einem Quader entlang der Zylinderachse. Verschiedene Punkte bei gleicher Amplitude entsprechen unterschiedlichen Partikelpositionen zu Beginn der Simulation

6.4 Konvektion in geneigten Behältern

In den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels wurde Konvektion in der Schwerelosigkeit in Idealbedingungen untersucht. In diesem Abschnitt werden nun Experimente präsentiert, bei denen Störfaktoren nicht gänzlich ausgeschlossen werden konnten. Die Experimente wurden 1995 von Pöschel u. a. [101] durchgeführt¹. Zylinder mit Radius $R_c = 1,35$ cm und Höhe $h_c = 6,5$ cm wurden schichtweise mit Granulat befüllt. Jede zweite Schicht wurde mit Eisenoxid rot eingefärbt. Anschließend wurden die Zylinder in einem Parabelflug einer Vibration mit Frequenz $1 \text{ Hz} \leq f \leq 10 \text{ Hz}$ und Amplitude $A_0 \in \{0,825 \text{ cm}; 1,8 \text{ cm}\}$ ausgesetzt. Nach Abschluss der Experimente wurden die Zylinder mit durchsichtigem Harz ausgegossen und parallel zur Zylinderachse gesägt.

Abbildung 50 zeigt Fotos einiger Schnittflächen. Die Ergebnisse weichen deutlich von der erwarteten $c\uparrow$ -Konvektion ab. Die Neigung der Streifen in einigen Bildern, z. B. in Abbildungen 50a, 50b und 50k, deutet auf eine einzige Konvektionszelle hin, in der sich das Granulat entlang einer Seite der Schnittebene nach oben und entlang der anderen Seite nach unten bewegt ($l\uparrow r\uparrow$ -Konvektion). Bei einigen Proben, z. B. Abbildungen 50d und 50e, sind die Streifen sogar um 90° gedreht. Die Konvektion in Abbildung 50g scheint eine Mischung aus einer $l\uparrow r\uparrow$ -Konvektion und einer $c\uparrow$ -Konvektion zu sein,

¹ Die Experimente wurden von Pöschel u. a. [101] durchgeführt, die Analyse der Experimente und alle hier präsentierten Bilder entstammen jedoch der Arbeit des Autors dieser Dissertation.

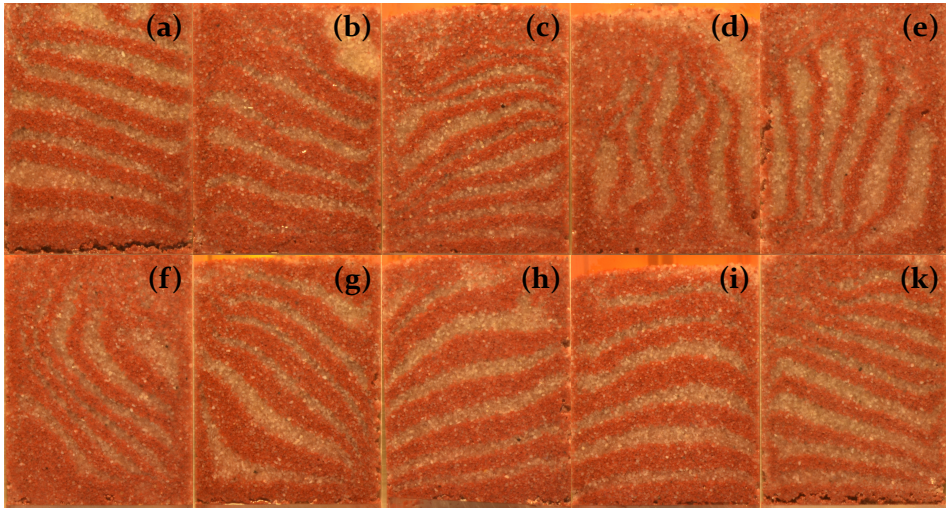


Abbildung 50: Bilder der Schnittebenen einiger Proben

wobei sich das Granulat zwar auf einer Seite nach oben und auf der anderen Seite nach unten bewegt, sich die Streifen aber gleichzeitig auch biegen.

In einer zweidimensionalen Schnittfläche kann man sich eine $\downarrow\uparrow$ -Konvektion mit einer einzigen Konvektionszelle gut vorstellen. In den dreidimensionalen Raum lässt sich die Konvektion jedoch nicht einfach übertragen. Abbildung 51 stellt daher jeweils zwei zueinander senkrechte Schnitte durch die Röntgenaufnahmen zweier Zylinder dar. Zwei der Schnittebenen zeigen die gleiche

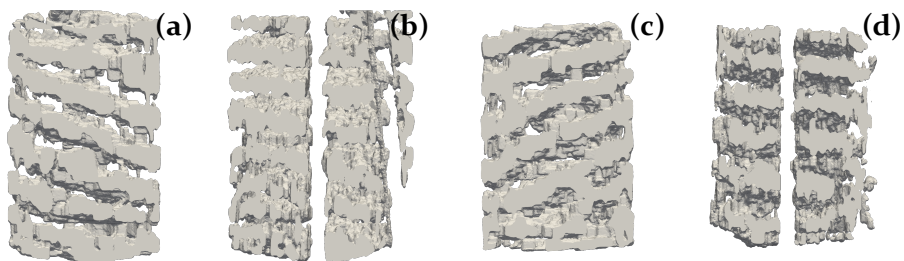


Abbildung 51: Röntgenaufnahmen zweier Zylinder. Einzelne Bilder zeigen Schnitte durch die Zylinderachse. Abbildungen (a) und (b) entstammen dem gleichen Experiment wie Abbildung 50a, Abbildungen (c) und (d) dem gleichen wie 50b. Die Bilder in (a) und (c) entsprechen einem Schnitt durch die Rekonstruktion entlang der Schnittebenen aus Abbildungen 50a und 50b. Die in (b) und (d) dargestellten Ebenen zeigen eine dazu senkrechte Schnittebene durch die Zylinderachse. Abbildungen (b) und (d) sind durch vertikalen Lücken in zwei Teile geteilt, da die Proben gesägt wurden

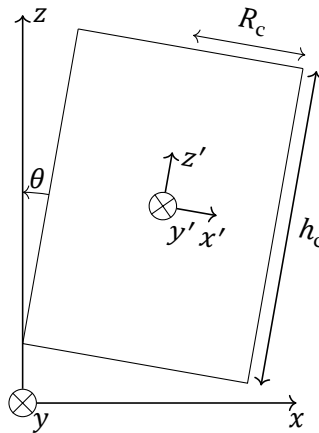


Abbildung 52: Skizze des rotierten Versuchsaufbaus. Der Zylinder ist um den Winkel θ um die y -Achse und gegen die Bewegungsrichtung geneigt. Die Vektoren \mathbf{x}' , \mathbf{y}' und \mathbf{z}' im Zentrum des Zylinders spannen das Koordinatensystem des Zylinders auf

Konvektion wie die Bilder in Abbildung 50. In den dazu senkrechten Schnittebenen ist jedoch ein deutlich verändertes Konvektionsverhalten zu erkennen. Die Schichten weisen keine klaren Veränderungen gegenüber dem Ausgangszustand auf und sind auch nicht gegen die Zylinderachse geneigt.

Ein möglicher Einflussfaktor, der in den Experimenten ein unbeabsichtigter Störfaktor war, und der die beschriebene Konvektion auslösen könnte, ist eine Neigung des Zylinders gegen seine Bewegungsrichtung: Mao-Bin u. a. [102] konnten zeigen, dass eine Neigung eines zweidimensionalen Behälters unter Bedingungen der Schwerkraft dazu führt, dass es zu einer $\uparrow\downarrow$ -Konvektion mit nur einer Konvektionszelle kommt. Um diesen Störeinfluss zu untersuchen, wird der Zylinder in der Simulation um den Winkel θ gegen seine Bewegungsrichtung geneigt. Der Neigung des Zylinders ist in Abbildung 52 dargestellt. Im Folgenden erfolgt die Auswertung innerhalb des in Abbildung 52 dargestellten eigenen Koordinatensystems des Zylinders x' , y' , z' .

Abbildungen 53 und 54 zeigen die Ergebnisse von Simulationen mit Frequenz $f = 6$ Hz, Amplitude $A_0 = 1,8$ cm und Winkeln $\theta \in \{0^\circ; 1^\circ; 2^\circ; 5^\circ\}$. In der x' - z' -Ebene weisen die gefärbten Schichten mit zunehmender Neigung des Zylinders eine größere Verformung auf (Abbildungen 53a-d). Auch anhand der dargestellten Strömungslinien (Abbildungen 53e-h) sieht man, dass die Konvektion mit steigender Neigung von der $\uparrow\downarrow$ -Konvektion abweicht und in eine $\downarrow\uparrow$ -Konvektion übergeht. Die Konvektionsgeschwindigkeit steigt mit zunehmender Neigung des Zylinders an. In der y' - z' -Ebene (Abbildung 54) ist keine

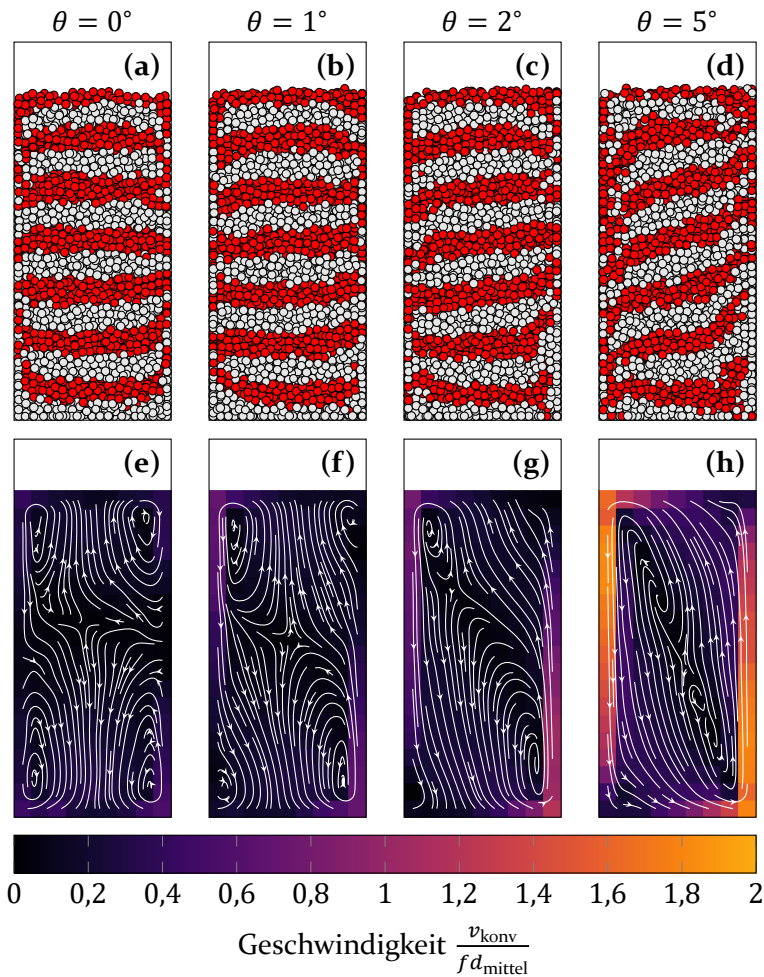


Abbildung 53: Konvektion in der $x'-z'$ -Ebene im zur Bewegungsrichtung geneigten Zylinder für verschiedene Winkel θ .

derartige Veränderung festzustellen. Die Konvektion ist eine $c\uparrow$ -Konvektion. Die Konvektionsgeschwindigkeit ist gering und unabhängig von der Neigung des Zylinders. Die beobachtete Konvektion stimmt mit den Ergebnissen der Experimente überein. Dort konnte zwar in einer Ebene eine klare Neigung der Partikelschichten festgestellt werden, in der dazu senkrechten Ebene jedoch nicht (Abbildung 51).

Die Konvektion in der $x'-z'$ -Ebene kann anhand der Partikelgeschwindigkeit relativ zum Zylinder erklärt werden. Diese sind in Abbildung 55 kurz vor und nach der unteren Kollision für den Winkel $\theta = 5^\circ$ dargestellt. Par-

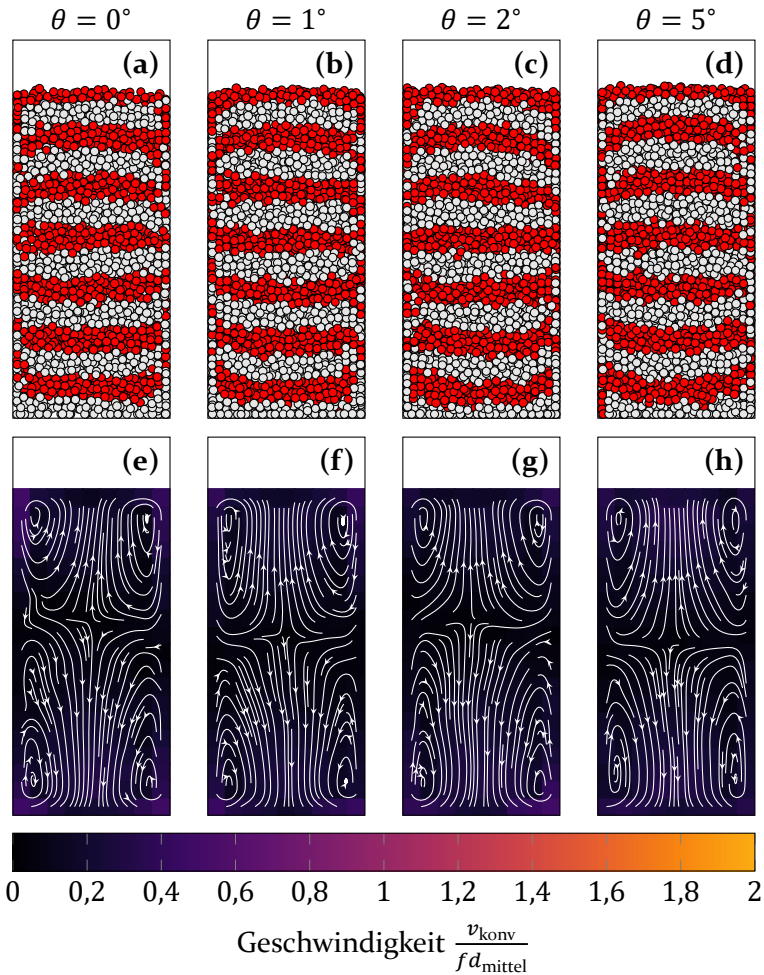


Abbildung 54: Konvektion in der y' - z' -Ebene im zur Bewegungsrichtung geneigten Zylinder für verschiedene Winkel θ .

tikel auf der linken und rechten Seite der x' - z' -Ebene bewegen sich vor der Kollision mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Tatsächlich weisen die Partikelgeschwindigkeiten am rechten und linken Rand im Verlauf einer Vibrationsperiode systematische Unterschiede auf (Abbildung 56). Vor der unteren Kollision bewegen sich die Partikel am rechten Rand langsamer als die Partikel am linken Rand, siehe auch Abbildung 55a. Vor der oberen Kollision ist es umgekehrt. Diese Unterschiede entstehen aufgrund der Neigung des Zylinders gegen seine Bewegungsrichtung. Partikel auf einer Seite des Zylinders werden in ihrer Bewegung eingeschränkt und werden durch Kollisionen mit dem

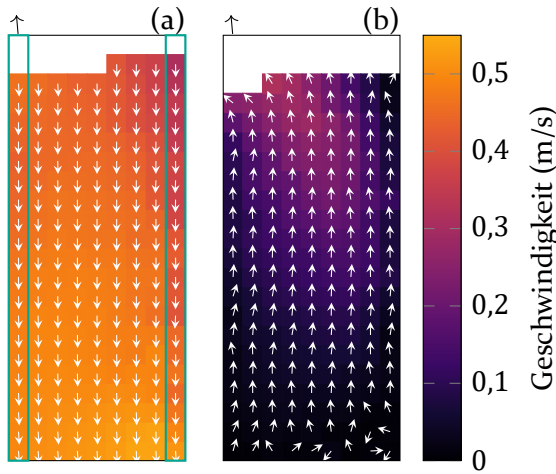


Abbildung 55: Die Partikelgeschwindigkeit in der x' - z' -Ebene relativ zum Zylinder. Abbildung (a) zeigt den Moment, bevor das Granulat mit der unteren Wand des Zylinders kollidiert. Abbildung (b) zeigt einen Moment nach der Kollision. Die in (a) grün markierten Bereiche werden für die weitere Analyse in Abbildung 56 verwendet. Pfeile über den Abbildungen deuten die von der Zylinderachse abweichende Richtung der Zylinderbewegung an

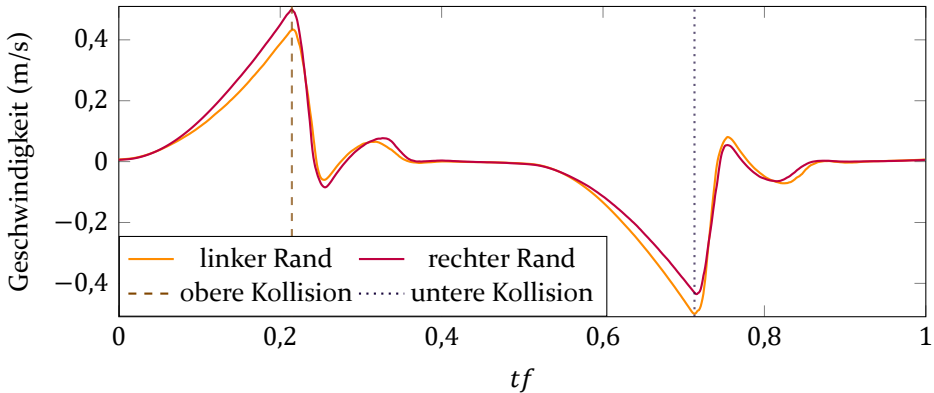


Abbildung 56: Die Partikelgeschwindigkeit in der x' - z' -Ebene relativ zum Zylinder. Der *linke* und *rechte* Rand entsprechen den in Abbildung 55a grün markierten Bereichen. Vertikale Linien geben die Zeitpunkte der oberen und unteren Kollision an

Zylinder langsamer. Partikel auf der anderen Seite können sich freier bewegen und werden vom Zylinder beschleunigt. Folglich bewegen sich die Partikel bei der hier vorgegebenen Neigung im Mittel über eine Periode am rechten Rand nach oben, während sie sich am linken Rand nach unten bewegen.

Zusätzlich kommt es bei den obersten und untersten Partikeln im Granulat zu horizontalen Bewegungen von einer Seite zur anderen. Dies ist z. B. kurz

nach den Kollisionen der Fall (Abbildung 55b). Auch diese Seitwärtsbewegung ist in der Neigung des Zylinders begründet: Durch die Neigung werden die Partikel z. B. auf dem Weg nach oben nicht nur entlang der Zylinderachse beschleunigt, sondern auch in Richtung der linken Zylinderwand.

Zusammengefasst ist die abweichende Konvektion im geneigten Zylinder geometrisch begründet. Abbildung 57a zeigt, dass die $\uparrow\downarrow$ -Konvektion auch ohne Reibung im geneigten Zylinder auftritt. Bei hoher Reibung ist die Konvek-

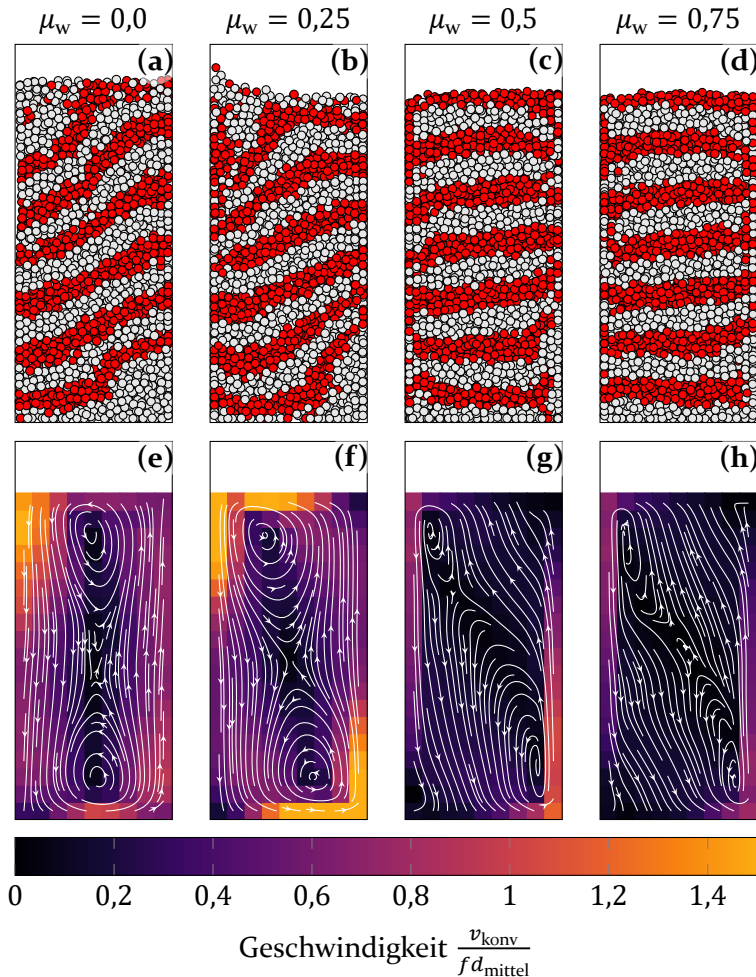


Abbildung 57: Konvektion in der x' - z' -Ebene einer Simulation mit Frequenz $f = 6$ Hz und Amplitude $1,8$ cm eines um $\theta = 2^\circ$ geneigten Zylinders. Einzelne Abbildungen zeigen die Konvektion für verschiedene Reibungskoeffizienten μ_w zwischen den Partikeln und dem Zylinder

tion eine Mischung aus der $l\uparrow r\uparrow$ -Konvektion und der $c\downarrow$ -Konvektion (Abbildung 57b-d).

6.5 Zusammenfassung

Unter Bedingungen der Schwerelosigkeit kommt es bei Vibration entlang der Achse eines mit Granulat gefüllten Zylinders zu einer $c\downarrow$ -Konvektion, bei der sich das Granulat in der Mitte des Zylinders jeweils zur nächsten Wand in Vibrationsrichtung bewegt. Es wurde gezeigt, dass diese Konvektion aufgrund der Reibung zwischen Granulat und Container entsteht.

Bei niedriger Vibrationsamplitude wurde abweichend von der erwarteten oben-unten symmetrischen $c\downarrow$ -Konvektion eine $c\uparrow$ - oder $c\downarrow$ -Konvektion beobachtet, bei der sich das Granulat in der Mitte des Zylinders nur in eine Richtung entlang der Achse bewegt. Ursache für diese Abweichung sind Unterschiede in der Volumenausdehnung des Granulats und der Relativgeschwindigkeit bei den Kollisionen zwischen dem Granulat und der unteren bzw. oberen Wand des Zylinders.

Über Konvektion unter Idealbedingungen hinaus wurden Experimente von Pöschel u. a. [101] analysiert, bei denen Schnittebenen durch die Zylinderachse eine $l\uparrow r\uparrow$ -Konvektion andeuteten, bei der sich das Granulat an einer Seite nach unten, und auf der anderen Seite nach oben bewegt. Diese Konvektion konnte mit einer Neigung des Zylinders gegenüber der Vibrationsrichtung auch in Simulationen erzeugt werden. Der Auslöser dieser Konvektion ist allein die geometrische Neigung, sodass sie sie auch in Abwesenheit von Reibung zwischen Granulat und Zylinder auftritt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Um Anwendungen des Jamming-Zustands simulieren zu können, wurde eine Methode zur Simulation von flexiblen Membranen in DEM-Simulationen, basierend auf MFS, vorgestellt. Im Gegensatz zu vorherigen MFS-Modellen können mit der neuen Simulationsmethode dünne Membranen mit geschlossener Oberfläche dargestellt und Reibungskräfte zwischen Membran und Granulat numerisch beschrieben werden. Weiterhin kann mit dem vorgestellten Membranmodell die Anzahl der Membranpartikel unabhängig vom Granulat gewählt werden, sodass Simulationen bei gleichem Ergebnis beschleunigt werden können, indem die Zahl der Membranpartikel verringert wird.

Mit dieser Methode wurde ein granularer Greifer mit einer Membran simuliert. Anhand der Simulationen wurde gezeigt, dass mit Granulaten aus weichen Partikeln höhere Reibungskräfte und damit höhere Haltekräfte zwischen Greifer und zu greifendem Objekt erzielt werden können als mit Granulaten aus harten Partikeln. Die höheren Reibungskräfte resultieren daher, dass durch die weicheren Partikel, bei gleichem Begrenzungsdruck, ein größerer Druck vom Greifer auf das Objekt ausgeübt wird. Die höheren Normalkräfte erlauben dann auch höhere Reibungskräfte.

Über die konkrete Anwendung des granularen Greifers hinaus befasste sich diese Arbeit allgemeiner mit einem granularen Metamaterial. Dabei wurde auf den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des Metamaterials und den Eigenschaften seiner Bestandteile eingegangen: Ein hoher Elastizitätsmodul der Partikeln und der Membran, ein hoher Begrenzungsdruck und ein Granulat mit hoher Packungsdichte führen zu einem festen Metamaterial. Eine hohe Packungsdichte und Partikel mit hoher Reibung führen zu einer hohen Bruchfestigkeit. Außerdem wurde demonstriert, dass das Metamaterial allgemein auf affine Weise deformiert und seine Bruchfestigkeit mit der Spannung übereinstimmt, bei der das Kraftnetzwerk zusammenbricht. Diese Ergebnisse sind auch für konkrete Anwendungen des Jamming-Zustands wie den granularen Greifer relevant.

Schließlich wurde granulare Konvektion in der Schwerelosigkeit analysiert. Die oben-unten-symmetrische Konvektion konnte durch ein Zusammenspiel aus Kompression und Ausdehnung des Granulats und der Reibung zwischen

den Granulatpartikeln und dem Behälter erklärt werden. Es wurde demonstriert, dass eine Konvektion ohne Oben-Unten-Symmetrie erzeugt werden kann, indem das Granulat Vibrationen mit kleiner Amplitude ausgesetzt wird. Die Symmetriebrechung entsteht dann, da das Granulat auf beiden Seiten des Behälters mit unterschiedlichen Volumenausdehnungen und Relativgeschwindigkeiten auftrifft. Weiterhin wurde gezeigt, dass schon eine kleine Neigung des Behälters gegen seine Bewegungsrichtung zur Folge hat, dass sich das Granulat auf einer Seite des Behälters nach oben bewegt und auf der anderen nach unten.

7.2 Ausblick

Bei der Analyse des granularen Greifers wurde festgestellt, dass Granulate mit weichen Partikeln zu hohen Haltekräften des granularen Greifers führen. Gleichzeitig machen derartige Granulate den Greifer als Ganzes jedoch auch im Jamming-Zustand leichter deformierbar. Dies wurde anhand eines granularen Metamaterials gezeigt. Eine Lösung für diesen Widerspruch könnte es sein, Partikel zu verwenden, die aus zwei Materialien bestehen: einem harten Kern und einer weichen Hülle. Mit solchen Partikeln könnte der harte Kern für die notwendige Stabilität im Jamming-Zustand sorgen, und die weiche Hülle höhere Haltekräfte ermöglichen. Falls zukünftige Untersuchungen zu dem Ergebnis kommen, dass beide Effekte auch mit derartigen Partikeln nicht gleichzeitig hervorgerufen werden können, so bieten diese zumindest eine einfache Möglichkeit, durch das Verhältnis zwischen Hülle und Kern, beide Effekte gegeneinander abzuwägen.

Auch die Simulationemethode des Greifers kann noch erweitert werden. Mit der hier vorgestellten Simulation ist es nicht möglich, auch die Haltekraft aufgrund des Druckunterschieds zwischen dem von Membran und Objekt eingeschlossenen Raum und der Umgebung vorherzusagen. Zum einen besteht die Membran aus Dreiecken, weshalb eine vollständige Anpassung an ein Objekt nur in Ausnahmefällen möglich ist. Zum anderen beinhaltet die Simulation keine Simulation der Umgebungsluft, womit auch keine Vorhersage der Kräfte aufgrund des Druckunterschieds zwischen der Umgebung und dem von Membran und Objekt eingeschlossenen Raum möglich ist. Zumindest das zweite Problem könnte in zukünftigen Arbeiten z. B. durch eine Volumenkopplung zwischen DEM und FEM gelöst werden.

Die Analyse des granularen Metamaterials liefert Richtlinien für die Auswahl von Granulat und Präparationsprotokoll, um anwendungsspezifische, mechanische Eigenschaften derartiger Metamaterialien zu erreichen. Diese

sind auch von Interesse für andere technische Anwendungen des Jamming-Übergangs bzw. Jamming-Zustands. Untersuchungen auch der zyklischen Belastung des Metamaterials könnten die Richtlinien erweitern.

Für die Konvektion in der Schwerelosigkeit könnte eine Stabilitätsanalyse der Symmetriebrechung durchgeführt werden. Außerdem könnte untersucht werden, ob es einen Zusammenhang zwischen Füllhöhe, Amplitude und Höhe des Zylinders gibt, der den Wechsel von oben-unten-symmetrischer zu unsymmetrischer Konvektion angibt. Weiterhin könnte man testen, ob die Konvektion, die man unter Idealbedingungen in einer Simulation erhält, auch in Experimenten reproduzierbar ist. Eventuell tritt diese nicht auf, wenn schon ein kleiner Störeinfluss, wie eine leichte Abweichung der Zylinderachse von der Bewegungsrichtung, ausreicht, um andere Konvektionen zu erzeugen.

8 Summary

The simulation of granular jamming applications requires a realistic membrane model. Therefore, a new model based on MFS was presented. In contrast to previous MFS models, the new simulation method can be used to represent a thin flexible membrane with a closed surface that enables the calculation of realistic frictional forces between the membrane and a granulate. Additionally, it allows for faster simulations because the number of membrane particles can be selected independently of the granulate.

For the first time, this method enabled simulations of the granular gripper with a realistic membrane representation. These simulations showed that the frictional forces and thus holding forces between the gripper and a gripped object are higher with granulates made of soft particles than with granulates made of hard particles: Due to the soft particles, the gripper exerts a greater pressure on the object even for the same confining pressure. The higher pressure then leads to higher normal forces and higher frictional forces.

Beyond the specific application of the granular gripper, this work dealt with a less specific granular metamaterial. The relationship between the properties of the metamaterial and the properties of its components was analysed: A high elastic modulus of particles and membrane, a high confining pressure and a granular material with a high packing density lead to a stiff metamaterial. A high packing density and particles with high friction lead to a high ultimate strength. Further, it was demonstrated that the metamaterial generally deforms in an affine manner and that its ultimate strength corresponds to the stress at which the force network collapses. These results are also relevant for specific applications of the granular jamming effect, as e.g. the granular gripper.

Finally, granular convection in zero gravity was analysed. The top-bottom symmetric convection was explained by an interplay of compression and expansion of the granulate and the friction between the granulate and the container. It was demonstrated that a convection without top-bottom symmetry can be achieved by using vibrations with small amplitudes. The symmetry breaking occurs because the granulate collides with both sides of the container while having different volume fractions and relative velocities. Furthermore, it was shown that even a small inclination of the container against its direction of movement results in the granulate moving upwards on one side of the container and downwards on the other.

Anhang

A Kraft-Deformations-Verhältnis im 3-Punkt-Timoshenko-Balken

Das Kraft-Deformations-Verhältnis im 3-Punkt-Balken kann mithilfe der Timoshenko-Balkentheorie berechnet werden. Das Gleichungssystem

$$M = -E_b I_b \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (52)$$

$$Q = \kappa A_b G_b \left(-\phi + \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right) \quad (53)$$

beschreibt in der Timoshenko-Balkentheorie den Zusammenhang zwischen dem Biegemoment in y -Richtung M_y , der Querkraft in z -Richtung Q_z , der Rotation ϕ , und der Deformation Δz . Dabei ist E_b der Elastizitätsmodul, I_b das Flächenträgheitsmoment, G_b der Schermodul und κ der Timoshenko-Scherkoeffizient des Balkens.

Für den hier betrachteten Balken der Länge L_b , der auf zwei gelenkigen Festlagern ruht, und von einer zentralen Kraft F deformiert wird, siehe Abbildung 15, ergibt sich für das Biegemoment außerdem

$$Q(x) = \begin{cases} F/2 & \text{falls } x < L_b/2 \\ -F/2 & \text{falls } L_b/2 < x \end{cases} \quad (54)$$

und für die Querkraft

$$M(x) = \frac{F}{2} \begin{cases} x & \text{falls } x \leq L_b/2 \\ L_b - x & \text{falls } x \geq L_b/2 \end{cases} \quad (55)$$

Beide Größen sind hier in zwei Teile geteilt. Rotation $\phi(x)$ und Deformation $\Delta z(x)$ des Balkens sind jedoch stetig. Zudem gilt für den Balken an den gelenkigen Festlagern

$$\Delta z(0) = \Delta z(L_b) = 0. \quad (56)$$

Ein Zusammenhang zwischen Kraft und Deformation kann durch Integration der Gleichungen (52) bis (55) unter Beachtung dieser Bedingungen berechnet werden. Für $x \leq L_b/2$ erhält man

$$\Delta z(x) = \frac{Fx}{2\kappa A_b G_b} - \frac{F}{E_b I_b} \left(\frac{x^3}{12} - \frac{3L_b^2 x}{48} \right), \quad (57)$$

für $x \geq L_b/2$

$$\Delta z(x) = \frac{FL_b - Fx}{2\kappa A_b G_b} - \frac{F}{E_b I_b} \left(\frac{L_b x^2}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{L_b^2 x}{8} - \frac{3L_b^2 x}{48} + \frac{L_b^3}{48} \right). \quad (58)$$

Aus beiden Gleichungen erhält man den Zusammenhang

$$\Delta z(L_b/2) = \frac{FL_b}{4\kappa A_b G_b} + \frac{FL_b^3}{48E_b I_b}. \quad (59)$$

Im Haupttext (Kapitel 5) bezieht sich Δz auf die Deformation in der Mitte des Balkens, d. h. $\Delta z \equiv \Delta z(L_b/2)$.

B Spannung und Dehnung im 4-Punkt-Euler-Bernoulli-Balken

Um Dehnung und Spannung aus der 4-Punkt-Biegebalkensimulation zu berechnen, wird die Euler-Bernoulli-Balkentheorie für kleine Verformungen herangezogen. Für einen Balken setzt die Theorie das Biegemoment in y -Richtung M_y und die Querkraft in z -Richtung Q_z mit dem Elastizitätsmodul E_b der Deformation Δz und dem Flächenträgheitsmoment I_b durch die Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} M_y &= -E_b I_b \frac{d^2 \Delta z}{dx^2} \\ Q_z &= -\frac{d}{dx} \left(E_b I_b \frac{d^2 \Delta z}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

in Beziehung. Das hier verwendete Koordinatensystem ist in Abbildung 22 definiert.

Ausgehend von einem auf gelenkige Festlager liegendem 4-Punkt-Biegebalken, der durch zwei Stäbe im Abstand von $L_b/3$ deformiert wird, ergeben sich für das Biegemoment

$$M_y(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} Fx & \text{falls } x < L_b/3 \\ \frac{FL_b}{3} & \text{falls } L_b/3 \leq x \leq 2L_b/3 \\ F(L-x) & \text{falls } 2L_b/3 < x \end{cases} \quad (61)$$

und die Querkraft

$$Q_z(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} F & \text{falls } x < L_b/3 \\ 0 & \text{falls } L_b/3 \leq x \leq 2L_b/3 \\ -F & \text{falls } 2L_b/3 < x \end{cases} . \quad (62)$$

Integriert man Gleichung (60) mit Gleichungen (61) und (62) unter Anwendung geeigneter Randbedingungen, erhält man an der Position $x = L_b/2$ die Beziehung

$$\Delta z \left(\frac{L_b}{2} \right) = \frac{FL_b^3}{6} \frac{23}{108E_bI_b} \quad (63)$$

zwischen Deformation und einwirkender Kraft. Zusätzlich kann ausgehend vom Biegemoment für die Position $x = L_b/2, z = -h_b/2$ die Spannung

$$\sigma = -\frac{M_{yz}}{I_b} = \frac{FL_b h_b}{6I_b} = \frac{FL_b}{h_b^2 t_b} \quad (64)$$

berechnet werden, wobei h_b die Höhe und t_b die Tiefe des Balkens sind. Unter der Annahme $\sigma = E_b \epsilon$ bei kleinen Dehnungen erlauben die Gleichungen ((63)) und ((64)) die Definition der Dehnung

$$\epsilon = \Delta z \left(\frac{L_b}{2} \right) \frac{108h_b}{23L_b^2} . \quad (65)$$

Dies ist ungefähr $\epsilon \approx 4,7 \Delta z (L_b/2) h_b / L_b^2$, was der Formel entspricht, die in Industriestandards, z. B. in [84], angegeben ist.

Man beachte, dass sich Δz im Haupttext auf die Deformation in der Mitte des Balkens bezieht, d. h. $\Delta z \equiv \Delta z(L_b/2)$.

C Lokale Mittelwerte in Granulatsystemen

In Granulaten sind viele physikalische Größen, wie die Geschwindigkeiten, nur in den einzelnen Partikeln definiert. Möchte man eine beliebige Partikelgröße G an einer Position im Granulatsystem ermitteln, an der sich kein Partikel befindet, muss daher auf lokale Mittelwerte ausgewichen werden.

Diese können berechnet werden, indem das Granulatsystem durch ein Raster in einzelne Zellen aufgeteilt wird. Anschließend wird für jeden Partikel i und jede Rasterzelle a das exakte Schnittvolumen

$$V_{i \cap a} = V_i \cap V_a \quad (66)$$

berechnet [103]. Eine lokale Dichte der Größe G erhält man dann durch

$$j_a^g = \sum_i \frac{G_i V_{i \cap a}}{V_i V_a}. \quad (67)$$

Lokale Mittelwerte erhält man aus Gleichung (67) durch Multiplikation mit dem Volumen der entsprechenden Rasterzelle.

C.1 Mittlere Geschwindigkeit

Die lokale, mittlere Geschwindigkeit in einer Rasterzelle zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t_1 kann aus den Positionen \mathbf{r} der Granulatpartikel ermittelt werden. Dazu berechnet man für jeden Partikel i den durchschnittlichen Impuls

$$\mathbf{p}_i(t_0, t_1) = m_i \frac{\mathbf{r}_i(t_1) - \mathbf{r}_i(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (68)$$

und daraus mit Gleichung (67) die Impulsdichte j_a^p für eine Rasterzelle a . Teilt man diese durch die Massendichte ρ_a , erhält man die lokale mittlere Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_a = \frac{j_a^p}{\rho_a} \quad (69)$$

in der Rasterzelle.

Literaturverzeichnis

- [1] Andreotti, B.; Forterre, Y.; Pouliquen, O.: *Granular Media: Between Fluid and Solid*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CBO9781139541008.
- [2] Elhacham, E.; Ben-Uri, L.; Grozovski, J.; Bar-On, Y. M.; Milo, R.: Global Human-Made Mass Exceeds All Living Biomass. *Nature* 588 (2020), 442–444. DOI: 10.1038/s41586-020-3010-5.
- [3] Jaeger, H. M.; Shinbrot, T.; Umbanhowar, P. B.: Does the Granular Matter? *Proceedings of the National Academy of Sciences* 97 (2000), 12959–12960. DOI: 10.1073/pnas.230395897.
- [4] Liu, A. J.; Nagel, S. R.: Jamming Is Not Just Cool Any More. *Nature* 396 (1998), 21–22. DOI: 10.1038/23819.
- [5] Cates, M. E.; Wittmer, J. P.; Bouchaud, J.-P.; Claudin, P.: Jamming, Force Chains, and Fragile Matter. *Physical Review Letters* 81 (1998), 1841–1844. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.1841.
- [6] Fitzgerald, S. G.; Delaney, G. W.; Howard, D.: A Review of Jamming Actuation in Soft Robotics. *Actuators* 9 (2020), 104. DOI: 10.3390/act9040104.
- [7] Xue, K.; Zheng, Y.; Fan, B.; Li, F.; Bai, C.: The Origin of Granular Convection in Vertically Vibrated Particle Beds: The Differential Shear Flow Field. *The European Physical Journal E* 36 (2013), 8. DOI: 10.1140/epje/i2013-13008-1.
- [8] Rodríguez-Liñán, G. M.; Nahmad-Molinari, Y.: Granular Convection Driven by Shearing Inertial Forces. *Physical Review E* 73 (2006), 011302. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.011302.
- [9] Taguchi, Y.-h.: New Origin of a Convective Motion: Elastically Induced Convection in Granular Materials. *Physical Review Letters* 69 (1992), 1367–1370. DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.1367.
- [10] Knight, J. B.; Jaeger, H. M.; Nagel, S. R.: Vibration-Induced Size Separation in Granular Media: The Convection Connection. *Physical Review Letters* 70 (1993), 3728–3731. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.3728.
- [11] Pöschel, T.; Herrmann, H. J.: Size Segregation and Convection. *Europhysics Letters* 29 (1995), 123. DOI: 10.1209/0295-5075/29/2/003.
- [12] Evesque, P.; Rajchenbach, J.: Instability in a Sand Heap. *Physical Review Letters* 62 (1989), 44–46. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.44.

- [13] Lu, L.-S.; Hsiau, S.-S.: Mixing in a Vibrated Granular Bed: Diffusive and Convective Effects. *Powder Technology* 184 (2008), 31–43. DOI: 10.1016/j.powtec.2007.07.036.
- [14] Majmudar, T. S.; Sperl, M.; Luding, S.; Behringer, R. P.: Jamming Transition in Granular Systems. *Physical Review Letters* 98 (2007), 058001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.058001.
- [15] O’Hern, C. S.; Langer, S. A.; Liu, A. J.; Nagel, S. R.: Random Packings of Frictionless Particles. *Physical Review Letters* 88 (2002), 075507. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.075507.
- [16] O’Hern, C. S.; Silbert, L. E.; Liu, A. J.; Nagel, S. R.: Jamming at Zero Temperature and Zero Applied Stress: The Epitome of Disorder. *Physical Review E* 68 (2003), 011306. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.011306.
- [17] Silbert, L. E.: Jamming of Frictional Spheres and Random Loose Packing. *Soft Matter* 6 (2010), 2918. DOI: 10.1039/c001973a.
- [18] Hermes, M.; Dijkstra, M.: Jamming of Polydisperse Hard Spheres: The Effect of Kinetic Arrest. *Europhysics Letters* 89 (2010), 38005. DOI: 10.1209/0295-5075/89/38005.
- [19] Hecke, M. van: Jamming of Soft Particles: Geometry, Mechanics, Scaling and Isostaticity. *Journal of Physics: Condensed Matter* 22 (2009), 033101. DOI: 10.1088/0953-8984/22/3/033101.
- [20] Ciamarra, M. P.; Pastore, R.; Nicodemi, M.; Coniglio, A.: Jamming Phase Diagram for Frictional Particles. *Physical Review E* 84 (2011), 041308. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.041308.
- [21] Silbert, L. E.; Ertaş, D.; Grest, G. S.; Halsey, T. C.; Levine, D.: Geometry of Frictionless and Frictional Sphere Packings. *Physical Review E* 65 (2002), 031304. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.031304.
- [22] Chaudhuri, P.; Berthier, L.; Sastry, S.: Jamming Transitions in Amorphous Packings of Frictionless Spheres Occur over a Continuous Range of Volume Fractions. *Physical Review Letters* 104 (2010), 165701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.165701.
- [23] Ciamarra, M. P.; Nicodemi, M.; Coniglio, A.: Recent Results on the Jamming Phase Diagram. *Soft Matter* 6 (2010), 2871–2874. DOI: 10.1039/B926810C.
- [24] Cundall, P. A.; Strack, O. D. L.: A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. *Géotechnique* 29 (1979), 47–65. DOI: 10.1680/geot.1979.29.1.47.

- [25] Schäfer, J.; Dippel, S.; Wolf, D. E.: Force Schemes in Simulations of Granular Materials. *Journal de Physique I* 6 (1996), 5–20. DOI: 10.1051/jp1:1996129.
- [26] Pöschel, T.; Schwager, T.: *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms*. Berlin ; New York: Springer-Verlag, 2005.
- [27] Kruggel-Emden, H.; Simsek, E.; Rickelt, S.; Wirtz, S.; Scherer, V.: Review and Extension of Normal Force Models for the Discrete Element Method. *Powder Technology* 171 (2007), 157–173. DOI: 10.1016/j.powtec.2006.10.004.
- [28] Kruggel-Emden, H.; Wirtz, S.; Scherer, V.: A Study on Tangential Force Laws Applicable to the Discrete Element Method (DEM) for Materials with Viscoelastic or Plastic Behavior. *Chemical Engineering Science* 63 (2008), 1523–1541. DOI: 10.1016/j.ces.2007.11.025.
- [29] Matuttis, H.-G.; Chen, J.: *Understanding the Discrete Element Method: Simulation of Non-Spherical Particles for Granular and Multi-body Systems*. Wiley, 2014.
- [30] Di Renzo, A.; Di Maio, F. P.: Comparison of Contact-Force Models for the Simulation of Collisions in DEM-based Granular Flow Codes. *Chemical Engineering Science* 59 (2004), 525–541. DOI: 10.1016/j.ces.2003.09.037.
- [31] Brilliantov, N. V.; Spahn, F.; Hertzsch, J.-M.; Pöschel, T.: Model for Collisions in Granular Gases. *Physical Review E* 53 (1996), 5382–5392. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.5382.
- [32] Müller, P.; Pöschel, T.: Collision of Viscoelastic Spheres: Compact Expressions for the Coefficient of Normal Restitution. *Physical Review E* 84 (2011), 021302. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.021302.
- [33] Luding, S.: Introduction to Discrete Element Methods: Basic of Contact Force Models and How to Perform the Micro-Macro Transition to Continuum Theory. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 12 (2008), 785–826. DOI: 10.1080/19648189.2008.9693050.
- [34] Hauser, S.; Eckert, P.; Tuleu, A.; Ijspeert, A.: *Friction and Damping of a Compliant Foot Based on Granular Jamming for Legged Robots*. In: *2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*. 2016, 1160–1165. DOI: 10.1109/BIOROB.2016.7523788.

- [35] Brown, E.; Rodenberg, N.; Amend, J.; Mozeika, A.; Steltz, E.; Zakin, M. R.; Lipson, H.; Jaeger, H. M.: Universal Robotic Gripper Based on the Jamming of Granular Material. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 107 (2010), 18809–18814. DOI: 10.1073/pnas.1003250107.
- [36] Zhao, X.; Evans, T. M.: Discrete Simulations of Laboratory Loading Conditions. *International Journal of Geomechanics* 9 (2009), 169–178. DOI: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2009)9:4(169).
- [37] Zhao, X.; Evans, T. M.: Numerical Analysis of Critical State Behaviors of Granular Soils under Different Loading Conditions. *Granular Matter* 13 (2011), 751–764. DOI: 10.1007/s10035-011-0284-1.
- [38] Ergenzinger, C.; Seifried, R.; Eberhard, P.: A Discrete Element Model Predicting the Strength of Ballast Stones. *Computers & Structures. Civil-Comp* 108–109 (2012), 3–13. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.02.006.
- [39] Cheung, G.; O’Sullivan, C.: Effective Simulation of Flexible Lateral Boundaries in Two- and Three-Dimensional DEM Simulations. *Particulology* 6 (2008), 483–500. DOI: 10.1016/j.partic.2008.07.018.
- [40] Wang, Y.; Tonon, F.: Modeling Triaxial Test on Intact Rock Using Discrete Element Method with Membrane Boundary. *Journal of Engineering Mechanics* 135 (2009), 1029–1037. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000017.
- [41] Fitzgerald, S. G.; Delaney, G. W.; Howard, D.; Maire, F.: *Evolving Soft Robotic Jamming Grippers*. In: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Lille France: ACM, 2021, 102–110. DOI: 10.1145/3449639.3459331.
- [42] de Bono, J.; Mcdowell, G.; Wanatowski, D.: Discrete Element Modelling of a Flexible Membrane for Triaxial Testing of Granular Material at High Pressures. *Géotechnique Letters* 2 (2012), 199–203. DOI: 10.1680/geolett.12.00040.
- [43] Villard, P.; Chevalier, B.; Le Hello, B.; Combe, G.: Coupling between Finite and Discrete Element Methods for the Modelling of Earth Structures Reinforced by Geosynthetic. *Computers and Geotechnics* 36 (2009), 709–717. DOI: 10.1016/j.compgeo.2008.11.005.
- [44] Golec, K.; Palierne, J.-F.; Zara, F.; Nicolle, S.; Damiand, G.: Hybrid 3D Mass-Spring System for Simulation of Isotropic Materials with Any Poisson’s Ratio. *The Visual Computer* 36 (2020), 809–825. DOI: 10.1007/s00371-019-01663-0.

- [45] Wang, Y.; Guo, S.: *Elasticity Analysis of Mass-spring Model-Based Virtual Reality Vascular Simulator*. In: *2014 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. 2014, 292–297. DOI: 10.1109/ICMA.2014.6885711.
- [46] Duan, Y.; Huang, W.; Chang, H.; Chen, W.; Zhou, J.; Teo, S. K.; Su, Y.; Chui, C. K.; Chang, S.: Volume Preserved Mass–Spring Model with Novel Constraints for Soft Tissue Deformation. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics* 20 (2016), 268–280. DOI: 10.1109/JBHI.2014.2370059.
- [47] Qu, T.; Feng, Y. T.; Wang, Y.; Wang, M.: Discrete Element Modelling of Flexible Membrane Boundaries for Triaxial Tests. *Computers and Geotechnics* 115 (2019), 103154. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.103154.
- [48] Qin, Y.; Liu, C.; Zhang, X.; Wang, X.; Shi, B.; Wang, Y.; Deng, S.: A Three-Dimensional Discrete Element Model of Triaxial Tests Based on a New Flexible Membrane Boundary. *Scientific Reports* 11 (2021), 4753. DOI: 10.1038/s41598-021-84224-7.
- [49] Kot, M.; Nagahashi, H.: Mass Spring Models with Adjustable Poisson’s Ratio. *The Visual Computer* 33 (2017), 283–291. DOI: 10.1007/s00371-015-1194-8.
- [50] Ostoja-Starzewski, M.: Lattice Models in Micromechanics. *Applied Mechanics Reviews* 55 (2002), 35–60. DOI: 10.1115/1.1432990.
- [51] Bridson, R.; Marino, S.; Fedkiw, R.: *Simulation of Clothing with Folds and Wrinkles*. In: *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. SCA ’03. Goslar, DEU: Eurographics Association, 2003, 28–36.
- [52] Effeindzourou, A.; Chareyre, B.; Thoeni, K.; Giacomini, A.; Kneib, F.: Modelling of Deformable Structures in the General Framework of the Discrete Element Method. *Geotextiles and Geomembranes* 44 (2016), 143–156. DOI: 10.1016/j.geotexmem.2015.07.015.
- [53] Hu, L.; Hu, G. M.; Fang, Z. Q.; Zhang, Y.: A New Algorithm for Contact Detection between Spherical Particle and Triangulated Mesh Boundary in Discrete Element Method Simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 94 (2013), 787–804. DOI: 10.1002/nme.4487.
- [54] Lubachevsky, B. D.; Stillinger, F. H.: Geometric Properties of Random Disk Packings. *Journal of Statistical Physics* 60 (1990), 561–583. DOI: 10.1007/BF01025983.

- [55] Amend, J.; Cheng, N.; Fakhouri, S.; Culley, B.: Soft Robotics Commercialization: Jamming Grippers from Research to Product. *Soft Robotics* 3 (2016), 213–222. DOI: 10.1089/soro.2016.0021.
- [56] Shahsevani, R.; Reitelshöfer, S.; Alimardani, R.; Franke, J.: *Soft Jamming Gripper with the External Prominence of Membrane for Human-Robot Cooperation*. In: *2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA)*. 2019, 377–383. DOI: 10.1109/ICCMA46720.2019.8988671.
- [57] Gómez-Paccapelo, J. M.; Santarossa, A. A.; Bustos, H. D.; Pugnaroni, L. A.: Effect of the Granular Material on the Maximum Holding Force of a Granular Gripper. *Granular Matter* 23 (2020), 4. DOI: 10.1007/s10035-020-01069-z.
- [58] Santarossa, A.; D’Angelo, O.; Sack, A.; Pöschel, T.: Effect of Particle Size on the Suction Mechanism in Granular Grippers. *Granular Matter* 25 (2023), 16. DOI: 10.1007/s10035-022-01306-7.
- [59] Howard, D.; O’Connor, J.; Letchford, J.; Joseph, T.; Lin, S.; Baldwin, S.; Delaney, G.: A Comprehensive Dataset of Grains for Granular Jamming in Soft Robotics: Grip Strength and Shock Absorption. 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2212.06511.
- [60] Howard, D.; O’Connor, J.; Letchford, J.; Brett, J.; Joseph, T.; Lin, S.; Furby, D.; Delaney, G. W.: *Getting a Grip: In Materio Evolution of Membrane Morphology for Soft Robotic Jamming Grippers*. In: *2022 IEEE 5th International Conference on Soft Robotics (RoboSoft)*. 2022, 531–538. DOI: 10.1109/RoboSoft54090.2022.9762197.
- [61] Amend, J. R.; Brown, E.; Rodenberg, N.; Jaeger, H. M.; Lipson, H.: A Positive Pressure Universal Gripper Based on the Jamming of Granular Material. *IEEE Transactions on Robotics* 28 (2012), 341–350. DOI: 10.1109/TRO.2011.2171093.
- [62] Kapadia, J.; Yim, M.: *Design and Performance of Nubbed Fluidizing Jamming Grippers*. In: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2012, 5301–5306. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6225111.
- [63] Mishra, R.; Philips, T.; Delaney, G. W.; Howard, D.: Vibration Improves Performance in Granular Jamming Grippers. 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2109.10496.
- [64] Licht, S.; Collins, E.; Badlissi, G.; Rizzo, D.: *A Partially Filled Jamming Gripper for Underwater Recovery of Objects Resting on Soft Surfaces*. In: *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2018, 6461–6468. DOI: 10.1109/IROS.2018.8593361.

- [65] Licht, S.; Collins, E.; Ballat-Durand, D.; Lopes-Mendes, M.: *Universal Jamming Grippers for Deep-Sea Manipulation*. In: *OCEANS 2016 MTS/IEEE Monterey*. 2016, 1–5. DOI: 10.1109/OCEANS.2016.7761237.
- [66] Miettinen, J.; Frilund, P.; Vuorinen, I.; Kuosmanen, P.; Kiviluoma, P.: Granular Jamming Based Robotic Gripper for Heavy Objects. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences* 68 (2019), 421. DOI: 10.3176/proc.2019.4.12.
- [67] Meuleman, S.; Balt, V.; Jarray, A.; Magnanimo, V.: *Investigation of Particle Properties on the Holding Force in a Granular Gripper*. In: *PARTICLES V: Proceedings of the V International Conference on Particle-Based Methods: Fundamentals and Applications*. CIMNE, 2017, 588–599.
- [68] Miura, H.; Kimoto, M.: A Comparison of Grid Quality of Optimized Spherical Hexagonal–Pentagonal Geodesic Grids. *Monthly Weather Review* 133 (2005), 2817–2833. DOI: 10.1175/MWR2991.1.
- [69] Sadourny, R.; Arakawa, A.; Mintz, Y.: Integration of the Nondivergent Barotropic Vorticity Equation with an Icosahedral-Hexagonal Grid for the Sphere. *Monthly Weather Review* 96 (1968), 351–356. DOI: 10.1175/1520-0493(1968)096<0351:IOTNBV>2.0.CO;2.
- [70] Loeve, A. J.; van de Ven, O. S.; Vogel, J. G.; Breedveld, P.; Dankelman, J.: Vacuum Packed Particles as Flexible Endoscope Guides with Controllable Rigidity. *Granular Matter* 12 (2010), 543–554. DOI: 10.1007/s10035-010-0193-8.
- [71] Yanagida, T.; Adachi, K.; Nakamura, T.: *Development of Endoscopic Device to Veer out a Latex Tube with Jamming by Granular Materials*. In: *2013 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. 2013, 1474–1479. DOI: 10.1109/ROBIO.2013.6739674.
- [72] Cianchetti, M.; Ranzani, T.; Gerboni, G.; De Falco, I.; Laschi, C.; Men-ciassi, A.: *STIFF-FLOP Surgical Manipulator: Mechanical Design and Experimental Characterization of the Single Module*. In: *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2013, 3576–3581. DOI: 10.1109/IROS.2013.6696866.
- [73] Blanc, L.; Pol, A.; François, B.; Delchambre, A.; Lambert, P.; Gabrieli, F.: Granular Jamming as Controllable Stiffness Mechanism for Medical Devices. In: *Micro to MACRO Mathematical Modelling in Soil Mechanics*. Hrsg. von Giovine, P.; Mariano, P. M.; Mortara, G. Cham: Springer International Publishing, 2018, 57–66. DOI: 10.1007/978-3-319-99474-1_6.

- [74] Brigido-González, J. D.; Burrow, S. G.; Woods, B. K.: Switchable Stiffness Morphing Aerostructures Based on Granular Jamming. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 30 (2019), 2581–2594. DOI: 10.1177/1045389X19862372.
- [75] Karimi, M. A.; Alizadehyazdi, V.; Busque, B.-P.; Jaeger, H. M.; Spenko, M.: *A Boundary-Constrained Swarm Robot with Granular Jamming*. In: *2020 3rd IEEE International Conference on Soft Robotics (RoboSoft)*. 2020, 291–296. DOI: 10.1109/RoboSoft48309.2020.9115996.
- [76] Jiang, P.; Yang, Y.; Chen, M. Z. Q.; Chen, Y.: A Variable Stiffness Gripper Based on Differential Drive Particle Jamming. *Bioinspiration & Biomimetics* 14 (2019), 036009. DOI: 10.1088/1748-3190/abo4d1.
- [77] Pendry, J. B.: Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Physical Review Letters* 85 (2000), 3966–3969. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3966.
- [78] Huijben, F.; Van Herwijnen, F.; Nijssse, R.: Concrete Shell Structures Revisited: Introducing a New ‘low-Tech’ Construction Method Using Vacuumatics Formwork. In: *Structural Membranes 2011: Proceedings of the 5th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures*. Hrsg. von Oñate, E.; Kröplin, B.; Bletzinger, K.-U. Barcelona, Spain, 2011.
- [79] Huijben, F.: *Vacuumatics: 3D Formwork Systems : Investigations of the Structural and Morphological Nature of Vacuumatic Structures so as to Be Used as Semi-Rigid Formwork Systems for Producing ‘free Forms’ and Customised Surface Textures in Concrete for Architectural Applications*. Doctor of Philosophy. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2014.
- [80] Brigido, J. D.; Burrow, S. G.; Woods, B. K.; Bartkowski, P.; Zalewski, R.: Flexural Models for Vacuum-Packed Particles as a Variable-Stiffness Mechanism in Smart Structures. *Physical Review Applied* 17 (2022), 044018. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.17.044018.
- [81] Timoshenko, S.: LXVI. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41 (1921), 744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264.
- [82] Timoshenko, S.: X. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 43 (1922), 125–131. DOI: 10.1080/14786442208633855.

- [83] Hutchinson, J. R.: Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics* 68 (2000), 87–92. DOI: 10.1115/1.1349417.
- [84] *Standard Test Method for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials by Four-Point Bending*. Standard. ASTM International, 2020. DOI: 10.1520/D6272-17E01.
- [85] *Fibre-Reinforced Plastic Composites – Determination of Flexural Properties*. Standard. Deutsches Institut für Normung e.V., 2011. DOI: 10.31030/3344826.
- [86] Song, C.; Wang, P.; Makse, H. A.: A Phase Diagram for Jammed Matter. *Nature* 453 (2008), 629–632. DOI: 10.1038/nature06981.
- [87] Jin, Y.; Makse, H. A.: A First-Order Phase Transition Defines the Random Close Packing of Hard Spheres. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389 (2010), 5362–5379. DOI: 10.1016/j.physa.2010.08.010.
- [88] Truesdell, C.: *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788. Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia Vol. X et XI Series Secundae*. Birkhäuser Basel, 1960.
- [89] Falk, M. L.; Langer, J. S.: Dynamics of Viscoplastic Deformation in Amorphous Solids. *Physical Review E* 57 (1998), 7192–7205. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.7192.
- [90] Faraday, M.: XVII. On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 121 (1831), 299–340. DOI: 10.1098/rstl.1831.0018.
- [91] Ehrichs, E. E.; Jaeger, H. M.; Karczmar, G. S.; Knight, J. B.; Kuperman, V. Y.; Nagel, S. R.: Granular Convection Observed by Magnetic Resonance Imaging. *Science* 267 (1995), 1632–1634. DOI: 10.1126/science.267.5204.1632.
- [92] Knight, J. B.; Ehrichs, E. E.; Kuperman, V. Y.; Flint, J. K.; Jaeger, H. M.; Nagel, S. R.: Experimental Study of Granular Convection. *Physical Review E* 54 (1996), 5726–5738. DOI: 10.1103/PhysRevE.54.5726.
- [93] Talbot, J.; Viot, P.: Wall-Enhanced Convection in Vibrofluidized Granular Systems. *Physical Review Letters* 89 (2002), 064301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.064301.
- [94] Pöschel, T.; Schwager, T.: Is There a Critical Acceleration for the Onset of Convection? In: *Physics of Dry Granular Media*. Hrsg. von Herrmann, H. J.; Hovi, J.-P.; Luding, S. Dordrecht: Springer Netherlands, 1998, 625–632. DOI: 10.1007/978-94-017-2653-5_46.

- [95] Tennakoon, S. G. K.; Kondic, L.; Behringer, R. P.: Onset of Flow in a Horizontally Vibrated Granular Bed: Convection by Horizontal Shearing. *Europhysics Letters* 45 (1999), 470–475. DOI: 10.1209/epl/i1999-00190-3.
- [96] Medved, M.; Jaeger, H. M.; Nagel, S. R.: Modes of Response in Horizontally Vibrated Granular Matter. *Europhysics Letters* 52 (2000), 66–72. DOI: 10.1209/epl/i2000-00405-1.
- [97] Hsiau, S. S.; Chen, C. H.: Granular Convection Cells in a Vertical Shaker. *Powder Technology* 111 (2000), 210–217. DOI: 10.1016/S0032-5910(99)00287-9.
- [98] Lan, Y.; Rosato, A.: Convection Related Phenomena in Granular Dynamics Simulations of Vibrated Beds. *Physics of Fluids* 9 (1997), 3615–3624. DOI: 10.1063/1.869499.
- [99] Grossman, E.: Effects of Container Geometry on Granular Convection. *Physical Review E* 56 (1997), 3290–3300. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.3290.
- [100] Rodríguez-Rivas, A.; López-Castaño, M. A.; Vega Reyes, F.: Zero-Gravity Thermal Convection in Granular Gases. *Physical Review E* 102 (2020), 010901. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.010901.
- [101] Pöschel, T.; Freund, J. A.; Buchholtz, V.: Persönl. Mitteilung (2023).
- [102] Mao-Bin, H.; Qing-Song, W.; Rui, J.: Size Segregation in a Vibrated Tilted Compartmentalized Granular Chamber. *Chinese Physics Letters* 20 (2003), 1091–1093. DOI: 10.1088/0256-307X/20/7/335.
- [103] Strobl, S.; Formella, A.; Pöschel, T.: Exact Calculation of the Overlap Volume of Spheres and Mesh Elements. *Journal of Computational Physics* 311 (2016), 158–172. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.02.003.

Verzeichnis promotionsbezogener, eigener Publikationen

- [P1] Götz, H.; Pöschel, T.: DEM-simulation of Thin Elastic Membranes Interacting with a Granulate. *Granular Matter* 25 (2023), 61. DOI: 10.1007/s10035-023-01344-9.
- [P2] Thornton, A. R.; Plath, T.; Ostanin, I.; Götz, H.; Bisschop, J.-W.; Hassan, M.; Roehlal, R.; Wang, X.; Pourandi, S.; Weinhart, T.: Recent Advances in MercuryDPM. *Mathematics in Computer Science* 17 (2023), 13. DOI: 10.1007/s11786-023-00562-x.
- [P3] Götz, H.; Santarossa, A.; Sack, A.; Pöschel, T.; Müller, P.: Soft Particles Reinforce Robotic Grippers: Robotic Grippers Based on Granular Jamming of Soft Particles. *Granular Matter* 24 (2021), 31. DOI: 10.1007/s10035-021-01193-4.
- [P4] Götz, H.; Pöschel, T.: Granular Meta-Material: Response of a Bending Beam. *Granular Matter* 25 (2023), 58. DOI: 10.1007/s10035-023-01336-9.
- [P5] Götz, H.; Pöschel, T.; D'Angelo, O.: Structural Features of Jammed-Granulate Metamaterials. *Physical Review Research* 6 (2024), 013061. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.013061.

Beim Jamming-Übergang verändern sich die mechanischen Eigenschaften eines Granulats drastisch, wenn die Partikeldichte des Systems zunimmt: Loses Granulat verhält sich wie eine Flüssigkeit oder ein Gas und leistet nur geringen Widerstand unter externer Belastung. Im Jamming-Zustand bleiben die relativen Partikelpositionen jedoch im Wesentlichen unverändert, und das Granulat ist stabil gegenüber äußerer Einwirkung.

Technische Anwendungen des Jamming-Übergangs sind insbesondere im Bereich Soft-Robotics zu finden (z. B. der granulare Robotergreifer, granulare Pfoten oder granulare Metamaterialien). Meist bestehen sie aus einem Granulat, das von einer Membran umhüllt ist. Der Jamming-Übergang wird dann erreicht, indem das Granulat aufgrund eines Unterdrucks komprimiert wird.

Diese Arbeit stellt eine Methode zur Simulation solcher Anwendungen vor. Die Methode ermöglicht es, in Diskrete-Elemente-Simulationen neben dem Granulat auch Membranen zu simulieren. Für den granularen Robotergreifer wird anhand von Simulationen gezeigt, dass mit Granulaten aus weichen Partikeln hohe Haltekräfte erzeugt werden, während mit Granulaten aus harten Partikeln nur geringe Haltekräfte aufgebracht werden können. Zusätzlich wird das Deformationsverhalten eines granularen Metamaterials im Jamming-Zustand untersucht und charakterisiert. Es wird u. a. gezeigt, dass bei großen Deformationen des Materials das Kontaktnetzwerk neu gebildet wird, sich die Granulatpartikel jedoch kaum reorganisieren.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung von Granulaten in vibrierten Zylindern unter Bedingungen der Schwerelosigkeit. Durch die Vibration kommt es neben einem periodischen Jamming-Übergang auch zu Konvektion, die erwartungsgemäß immer eine Symmetrieachse senkrecht zur Vibrationsrichtung aufweist. Es wird gezeigt, dass diese Symmetrie bei bestimmten Vibrationsparametern oder einer Neigung des Zylinders entgegen der Vibrationsrichtung gebrochen ist, und auf die Ursache dieser Symmetriebrechung eingegangen.

